PRZEMYSŁOWY INSTYTUT AUTOMATYKI I POMIARÓW
MERA-PIAP
Al. Jerozolimskie 202 \ 02-222 Warszawa Telefon 23-70-81

OŚRODEK AUTOMATYKI ELEKTRYCZNEJ

440 Zespół Budowy Cyfrowych Urządzeń Systemowych BE10

Główny wykonawca dr inż. Wiesław Stańczak

Wykonawcy mgr inż.Krzysztof Stefański, techn.Cezary Skipirzepski

Konsultant

Nr zlecenia 9520

Pakiet programów wspomagający projektowanie płytek obowdów drukowanych metodą grupowania elementów.
Opracowanie narzędzi teoretycznych - twierdzenia.

Zleceniodawca praca własna

Pracę rozpoczęto dnia 87.08.01 **zakończono dnia** 88.05.31

Kierownik Zespołu
dr inż.A.Syryczyński

Z-ca Dyrektora d/s Automatyki
dr inż.T.Gałązka

Kierownik Ośrodka
prof.dr inż.T.Missala

Praca zawiera:

stron 18
rysunków
fotografii
tabel
tablic
załączników

Rozdzielnik - ilość egz: 3

Egz. 1 BOINTE
Egz. 2 OAE
Egz. 3 OAE
Egz. 4
Egz. 5
Egz. 6

Nr rejestr. 6050

Analiza deskryptorowa

Analiza dokumentacyjna

Tytuły poprzednich sprawozdań

621.38.049.75.001.1

obwody drukowane
– projektowanie

UKD

PIAP-252/83-6000

1. Wstęp

Praca ta dotyczy odpowiedniego rozmieszczenia elementów na płytce obwodów drukowanych . Przedstawione w niej podejście różni się w sposób zasadniczy od ogólnie znanych i powszechnie stosowanych produktów firm zachodnich jak np. smARTWORK firmy Wintek [7], Redboard firmy Racal-Redac [6] czy też OrCAD firmy OrCAD Systems Corporation [5]. W przed chwilą wymienionych pakietach projektant sam decyduje o rozmieszczeniu elementów. Ewentualnej automatyzacji podlega jedynie proces prowadzenia ścieżek łączących poszczególne wyprowadzenia. Przyjmowanym przy tym kryterium jest minimalizacja długości ścieżek. Przy okazji warto jeszcze nadmienić, iż wspomniana minimalizacja nie ma charakteru globalnego. Przeprowadzone eksperymenty wskazują, że najpierw prowadzi się jedną ze ścieżek (wybraną w sposób arbitralny jako pierwsza) po możliwie najkrótszej drodze, potem drugą itd. Jest rzeczą oczywistą, że takie podejście w wygodny dla projektanta sposób może prowadzić do dobrego projektu (w sensie sumarycznej długości ścieżek), jednakże trudno tu oczekiwać aby sumaryczna długość ścieżek przy z góry narzuconym wzajemnym usytuowaniu poszczególnych elementów osiągała w każdym projekcie wartość najmniejszą. Wytłumaczeniem dla twórców omawianych pakietów oprogramowania jest fakt, że podjęte tu zagadnienie jest niezwykle trudne i po dziś dzień nie doczekało się kompleksowego rozwiązania teoretycznego.

Drugim, o wiele ważniejszym zarzutem, który można sformułować w stosunku do wspomnianych wyżej pakietów oprogramowania jest zupełne pominięcie aspektów wzajemnego usytuowania elementów montowanych na płytce. Wagę tego zagadnienia (co prawda w odniesieniu do sieci o dużo prostrzej geometrii i strukturze, w której np. poszczególne połączenia mogą się wielokrotnie krzyżować) omówione w [1]. Mianowicie na umiejętnie dobranych przykładach wykazano, że dla jednego wzajemnego usytuowania elementów sieci optymalnie dobrana sumaryczna długość połączeń może nawet kilkakrotnie przewyższać wartość analogicznego parametru obliczonego dla innego umiejscowienia tych samych elementów sieci.

W świetle powyższych uwag można stwierdzić, iż globalna optymalizacja płytki obwodów drukowanych musi uwzględniać zarówno wzajemne usytuowanie elementów jak i sposób prowadzenia połączeń między nimi. Ponadto zastosowana metodyka rozwiązania omawianego zagadnienia powinna być podatna na wprowadzanie dodatkowych ograniczeń (dotyczących np. wzajemnych minimalnych odległości między niektórymi elementami lub ścieżkami) wynikających ze specyfiki działania układów elektronicznych (wzajemne sprzężenia, aspekty temperaturowe itp.). Niestety tak ogólnie sformułowany problem nie wydaje się możliwy do rozwiązania przy obecnym stanie wiedzy. Dlatego też proponuje się rozerwanie go na kilka kolejnych podproblemów. Pierwszym z nich jest zagadnienie odpowiedniego pogrupowania elementów. Innymi słowy chodzi o stwierdzenie, które elementy powinny być lokowane bliżej siebie, a które można usytuować w oddaleniu od tych pierwszych. Drugim podproblemem byłoby rozmieszczenie na płytce odpowiednio już pogrupowanych elementów. Na końcu rozwiązywane byłoby zagadnienie odpowiedniego prowadzenia ścieżek. Jak więc widać proponowana metodyka może być uznana za kontynuację i rozszerzenie omówionego na wstępie podejścia firm zachodnich.

W pracy zajęto się pierwszym ze wspomnianych wyżej podproblemów. W rozdziale 2 sformułowano i zinterpretowano pewne pojęcia matematyczne i przedstawiono wynikające stąd podstawowe konsekwencje. Rozdział 3 poświęcono wyjaśnieniu związków zachodzących między abstrakcyjnymi obiektami zdefiniowanymi w rozdziale 2 a problemem (sub)optymalnego płytki obwodów drukowanych. W rozdziałach 4 i 5 przedstawiono aspekty teoretyczne prowadzące do efektywnego rozwiązania zagadnienia grupowania elementów. W rozdziale 6 zamieszczono dodatkowe uwagi i wnioski końcowe.

2. Zespoły minimalne. Definicje i podstawowe właściwości

Rozważamy skończony zbiór elementów X, $|X| > 1$ i funkcję $f\colon \{\{A,B\}\colon A,\ B \subset X\} \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$, gdzie A, B jest parą nieuporządkowaną, zaś $\mathbb{R}^{+}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych. Odnośnie funkcji f czynimy dodatkowe założenia, iż $f(A;\emptyset) = 0$ dla każdego $A \subset X$, $f(\{x\}, \{x\}) = 0$ dla każdego $x \in X$, oraz że

$$f(A,B) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} f(\{x\}, \{y\}), \tag{2.1}$$

dla każdego niepustego A, $B \subset X$, przy czym dla uproszczenia dalszych wzorów zamiast $f(\{x\}, \{y\})$ będziemy pisać $w(x, y)$.

<u>Definicja 1</u>. *Niepusty zbiór S, $S \subset X$, $S \neq X$, będzie nazywany zespołem minimalnym, jeśli dla każdego jego niepustego podzbioru właściwego spełniona jest nierówność*

$$f(R,\ X-S) < f(R,\ S-R) \tag{2.2}$$

Interpretacja wprowadzonych wyżej pojęć może być następująca. X jest zbiorem elementów montowanych na płytce obwodów drukowanych jak np. układy scalone, tranzystory, kondensatory, rezystory itp. Symbol $w(x, y)$ określa siłę wzajemnych powiązań między elementami x, $y \in X$. W szczególnym, najprostrzym przypadku (patrz np. [2]) może to być liczba ścieżek łączących na schemacie ideowym elementy x oraz y. Jeśli zaś zależy nam nie tyle na minimalizacji długości połączeń na płytce, co na ograniczeniu materiału zużytego na wspomniane połączenia, to $w(x, y)$ należy wyznaczyć jako sumę szerokości ścieżek biegnących między x i y. Zatem zespół minimalny można uważać za taki podzbiór zbioru wszystkich elementów montowanych na płytce, który jest wewnętrznie silniej wzajemnie powiązany (w sensie nadawanym $w(x,y)$) niż z pozostałymi elementami.

Wprowadzimy teraz podstawowe właściwości zespołów minimalnych, które okażą się przydatne w dalszych rozważaniach. Stosując prawa de Morgana do definicji 1 otrzymujemy

<u>Wniosek 1</u>. *$\{x\}$ jest zespołem minimalnym dla każdego $x \in X$.*

<u>Lemat 1</u>. *Dwa różne zespoły minimalne są albo rozłączne, albo też jeden z nich zawiera się w drugim.*

<u>Dowod</u>. Niech S i Q będą różnymi zespołami minimalnymi. Przypadki $S \subset Q$ oraz $Q \subset S$ są oczywiste, więc można założyć iż $S \cap Q = T \neq \emptyset$, $P = Q - T \neq \emptyset$ oraz $R = S - T \neq \emptyset$. Oznaczając $H = X - (S \cup Q)$ i korzystając z definicji 1 a także ze wzoru (2.1) otrzymujemy

4

$$f(T,\ R) > f(T,\ X - S) = f(T,\ H) + f(T,\ P), \tag{2.3}$$
$$f(T,\ P) > f(T,\ X - Q) = f(T,\ H) + f(T,\ R). \tag{2.4}$$
Dodając stronami (2.3) i (2.4) uzyskujemy $f(T,\ H) < 0$, co jest niemożliwe, a zatem $T \neq \emptyset$, c.n.d.

Lemat 2. *S jest zespołem minimalnym wtedy i tylko wtedy, gdy*
$$f(R,\ X - R) > f(S,\ X - S) \tag{2.5}$$
dla każdego niepustego podzbioru właściwego R zbioru S.

Dowod. Rozważmy zbiór $S \subset X$, $S \neq X$ i jego niepusty podzbiór właściwy R oznaczając dla wygody $P = S - R$ oraz $H = X - S$. P i H są oczywiście niepuste i wzajemnie rozłączne, a ponadto $X - R = P \cup H$. Z (2.1) wynika zatem, iż
$$f(R,\ X - R) = f(R,\ H) + f(R,\ P), \tag{2.6}$$
$$f(S,\ X - S) = f(R,\ H) + f(P,\ H). \tag{2.7}$$
Założenie, że S jest zespołem minimalnym pociąga za sobą
$$f(P,\ X - S) = f(P,\ H) < f(P,\ R), \tag{2.8}$$
zgodnie z definicją 1. Dodając $f(R,\ H)$ do obydwu stron (2.9) i korzystając z (2.6) i (2.7) otrzymujemy (2.5), co kończy pierwszą część dowodu.

Przypuśćmy teraz, że dla każdego niepustego podzbioru właściwego R zbioru S jest spełniona nierówność (2.5). Wówczas po podstawieniu (2.6) i (2.7) do (2.5) i po odjęciu stronami czynnika $f(R,\ H)$ otrzymujemy (2.8), c.n.d.

Lemat 2 można uznawać za inne określenie zespołu minimalnego, równoważne zresztą definicji 1. Jest on szczególnie przydatny przy wyprowadzaniu dalszych właściwości potrzebnych do konstrukcji efektywnego algorytmu grupowania obiektów.

3. Związki między zespołami minimalnymi a optymalnym problemem projektowym

Niech $d(x,y)$ oznacza długość ścieżki (bądź też średnią długość ścieżek) łączącej elementy $x,\ y \in X$. Wówczas sumaryczny (uogólniony) koszt połączeń między wzajemnie rozłącznymi i niepustymi zbiorami A i B, $A,\ B \subset X$ można zapisać w postaci
$$\Lambda(A,B) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} d(x,y)w(x,y), \tag{3.1}$$
zaś tę samą wielkość odnoszącą się jednak do wewnętrznych wzajemnych połączeń w zbiorze A można określić jako $0{,}5\Lambda(A,A)$, gdzie $\Lambda(A,A)$ jest dane wzorem (3.1), w którym B zastąpiono przez A. Załóżmy teraz, że zbiór X daje się rozbić na, powiedzmy, n rozłącznych zespołów minimalnych $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (por. lemat 2). Wtedy całkowity (uogólniony) koszt ścieżek wyniesie
$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \Lambda(S_i, S_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \Lambda(S_i, S_j) \tag{3.2}$$
Przypuśćmy, że elementy dowolnie wybranego, i-tego zespołu minimalnego S_i, $1 \leq i \leq n$, podzielono na dwa niepuste, wzajemnie rozłączne podzbiory P_i oraz R_i. Usytuowanie każdego $x \in R_i$ pozosta-

wiono przy tym bez zmian, zaś wszystkie elementy tworzące P_i przesunięto. W związku z tym oczywiście uległy zmianie co najmniej niektóre długości ścieżek, co odnotujemy pisząc $\bar{d}(x,y)$ zamiast $d(x,y)$, a nastepnie $\bar{\Lambda}(A,B)$ w miejsce $\Lambda(A,B)$ oraz $\phi(X)$ zamiast $\Phi(X)$. Po skorzystaniu ze wzorów (3.1) i (3.2) otrzymamy

$$\Delta\Phi S_i = \bar{\Phi}(X) - \Phi(X) =$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \sum_{x\in P_i} \sum_{y\in S_j} \left[\bar{d}(x,y)-d(x,y)\right] w(x,y)$$

$$+ \sum_{x\in P_i} \sum_{y\in R_i} \left[\bar{d}(x,y)-d(x,y)\right] w(x,y) \qquad (3.3)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{x\in P_i} \sum_{y\in P_i} \left[\bar{d}(x,y)-d(x,y)\right] w(x,y)$$

Poczynimy teraz następujące założenia:

Z 1.: *rozpatrywane rozsunięcie elementów zespołów minimalnych S_i nie powoduje zmniejszenia żadnej z długości ścieżek łączących elementy $x, y \in S_i$;*

Z 2.: *rozważane przemieszczenie elementów zespołu minimalnego S_i nie pociąga za sobą zwiększenia żadnej z długości ścieżek łączących elementy $x \in S_i$ oraz $y \in X-S_i$.*

Wprowadzone przed chwilą założenia można zinterpretować w następujący sposób. Otóż odpowiadają one sytuacji, w której elementy wybranego zespołu minimalnego S_i leżą blisko siebie, zaś elementy pozostałe tzn. wzięte z $X-S_i$ są od nich oddalone. Zaproponowany rodzaj przesunięcia - nieco dokładniej sprecyzowany założeniami Z1 i Z2 - ma więc na celu umożliwienie dania odpowiedzi na pytanie czy opłacalne (w sensie wartości zakładanej funkcji kryterialnej Φ) jest umieszczanie elementów tego samego zespołu minimalnego możliwie blisko siebie, a w związku z tym - lokowanie elementów z różnych zespołów minimalnych w pewnym oddaleniu.

Przypuśćmy, że

$$\Delta\Phi S_i < 0 \qquad (3.4)$$

Z założenia Z1 wynika, że w dalszych rozważaniach można pominąć ostatni człon stojący po prawej stronie (3.3), a więc Z1 i (3.4), pociągają za sobą

$$0 \leq \sum_{x\in P_i} \sum_{y\in R_i} \left[\bar{d}(x,y)-d(x,y)\right] w(x,y)$$

6

$$< - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \sum_{x\in P_i} \sum_{y\in S_j} [\bar{d}(x,y)-d(x,y)]\, w(x,y) \tag{3.5}$$

Z drugiej strony, ponieważ S_i jest zespołem minimalnym, więc zachodzi warunek (2.2), który można przepisać w postaci

$$\sum_{x\in P_i} \sum_{y\in R_i} w(x,y) > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \sum_{x\in P_i} \sum_{y\in S_j} w(x,y) \tag{3.6}$$

Z określenia funkcji f wynika, że prawa strona nierówności (3.6) jest nieujemna. Poza tym zerowanie się prawej strony wzoru (3.6) pociąga za sobą warunek $w(x,y) = 0$ dla każdej pary $x \in P_i$, $y \in X-S_i$, czyli także zerowanie się skrajnie prawego członu (3.5), co w rezultacie prowadzi do sprzeczności (interpretacją fizyczną zerowania się wszystkich wag $w(x,y)$, $x \in P_i$, $y \in X-S_i$ jest zupełny brak połączeń między P_i a $X-S_i$, co w oczywisty sposób implikuje zwiększenie się wartości wskaźnika jakości Φ wobec założenia (3.4)). Zatem możemy założyć, że prawa strona nierówności (3.6) jest dodatnia. Dzieląc stronami (3.5) przez (3.6) otrzymujemy

$$|\Delta d(P_i,\ R_i)| < |\Delta d(P_i,\ X-S_i)|, \tag{3.7}$$

gdzie

$$\Delta d(P_i,\ R_i) = \frac{\sum_{x\in P_i} \sum_{y\in R_i} [\bar{d}(x,y)-d(x,y)]\, w(x,y)}{\sum_{x\in P_i} \sum_{y\in R_i} w(x,y)} \tag{3.8}$$

jest uśrednionym przyrostem długości ścieżek wiążących ze sobą elementy tego samego zespołu minimalnego S_i, zaś

$$\Delta d(P_i,\ X-S_i) = \frac{-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \sum_{x\in P_i} \sum_{y\in S_j} [\bar{d}(x,y)-d(x,y)]\, w(x,y)}{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \sum_{x\in P_i} \sum_{y\in S_j} w(x,y)} \tag{3.9}$$

jest uśrednionym ubytkiem długości ścieżek wiążących ze sobą P_i oraz $X-S_i$, a więc łączących podzbiór rozważanego zespołu mini–

7

malnego ze wszystkimi pozostałymi elementami montowanymi na płytce.

Ostatnio uzyskany rezultat pozwala przeprowadzić rozważania używając aparatu geometrii. W przypadku płytek obwodów drukowanych zazwyczaj dobre przybliżenie rzeczywistości stanowi płaszczyzna kartezjańska z metryką typu Manhattan (tzn. odległość dwóch punktów o współrzędnych, odpowiednio, (x_1, y_1) i (x_2, y_2) jest definiowana jako $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$). Można także (biorąc tym razem pod uwagę płytki, w których zastosowano zwykłe połączenia drutowe) rozpatrywać płaszczyznę Euklidesową. Rozpatrzmy teraz trzy punkty na jednej ze wspomnianych płaszczyzn, a mianowicie (R), (P), (XS) (odpowiadają one, kolejno, " środkowi ciężkości " zbioru R_i, P_i oraz $X-S_i$). Łatwo zauważyć, iż wariant opisany wzorem (3.7) odpowiada niewspółliniowemu ułożeniu punktów (R), (P), (XS), a więc złemu wstępnemu (tzn. odpowiadającemu $\Phi(X)$) usytuowaniu elementów. Istotnie, w wyniku przesunięcia punktu (P) w kierunku prostej łączącej (R) i (XS) uzyska się zmniejszenie zarówno odległości między (R) i (P) jak i między (P) oraz (XS), czyli także średniej odległości między elementami ze zbiorów R_i i P_i oraz P_i i $X-S_i$, co przy zachowaniu wewnętrznych związków metrycznych w zbiorach R_i, P_i oraz $X-S_i$ spowoduje zmalenie wartości wskaźnika jakości Φ (patrz wzory (3.1) i (3.2)). W przypadku zaś współliniowości punktów (R), (P) i (XS) przyrost odległości między (R) i (P) równa się zmniejszeniu odległości między (P) i (XS), co odpowiada warunkowi

$$|\Delta d(P_i, R_i)| = |\Delta d(P_i, X-S_i| \tag{3.10}$$

Korzystając zatem z zasady kontrapozycji można sformułować wniosek mówiący, że spełniająca założenia Z1 i Z2 operacja rozsuwania elementów dowolnie wybranego zespołu minimalnego S_i przy zachowaniu warunku współliniowości (parz wzór (3.10) - odpowiada to prawidłowemu wstępnemu rozmieszczeniu poszczególnych grup elementów na płytce) pociąga za sobą wzrost całkowitego (uogólnionego) kosztu ścieżek.

Analogiczne rozumowanię można także przeprowadzić w przypadku, w którym $S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_i \subset \ldots \subset S_n$ (patrz także lemat 2). Otrzymuje się podobne wzory, w których jednak zamiast sumówania po $y \in S_j, j = 1, 2, \ldots, n, j \neq i$, należy dodawać po wszystkich $y \in X-S_i$.

Reasumując, można stwierdzić, że opłacalne jest przeprowadzenie projektu płytki w kilku etapach. Mianowicie po opracowaniu schematu elektrycznego należy wyznaczyć poszczególne zespoły minimalne elementów montowanych na płytce. Następnie należy starać się, aby elementy wchodzące w skład tego samego zespołu minimalnego były usytuowane możliwie blisko siebie. Dopiero potem powinno się prowadzić wzajemne połączenia używając do tego celu np. tzw. automatycznego autoroutingu wchodzącego w skład wymienionych we wstępie firmowych pakietów oprogramowania. Wadą proponowanego rozwiązania jest konieczność manualnego rozmieszczania poszczególnych elementów na płytce. Z drugiej jednak strony stanowi to także o uniwersalności metody. Mianowicie uwzględnia ona jedynie aspekty topologiczne schematu elektrycznego (tzn. fakt braku lub zaistnienia połączenia między poszczególnymi elementami), a więc można ją stosować w zasadzie wszędzie bez kłopotania się o dodatkowe ograniczenia (dotyczące np. wzajemnych minimalnych odległości między niektórymi elementami lub ścieżkami).wynikające ze specyfiki działania układów elektronicznych jak np. sprzężenia wzajemne, wpływy temperaturowe, itp. Spełnienie wspomnianych ograniczeń pozostawione jest projektantowi i jest realizowane w fazie ustalania rozmieszczenia elementów na płytce przy uwzględnieniu ich zgrupowania zgodnie z uprzednio wyznaczonymi zespołami minimalnymi.

4. Związki między zbiorami zespołów minimalnych i ich częściami

Definicja i podstawowe właściwości zespołów minimalnych przedstawione w rozdziale 1 nie mogą stanowić podstawy do skonstruowania efektywnego algorytmu służącego do wyznaczania zespołów minimalnych. Istotnie, w przypadku próby posłużenia się samą definicją 1 lub też lematem 2 należy rozważyć wszystkie podzbiory mnogości X zawierające więcej niż jeden element, a więc łącznie

$$2^{|X|} - |X| - 1 \tag{4.1}$$

podzbiorów. Dla ustalenia odpowiedniego punktu odniesienia wielkości przedstawionej wzorem (4.1) spróbujmy oszacować od góry liczbę zespołów minimalnych zawartych w zbiorze X. Niech $l_j^{(i)}$ oznacza liczbę zespołów minimalnych składających się z dokładnie j elementów i utworzonych jako suma mnogościowa (patrz lemat 1) uprzednio już wyznaczonych zespołów minimalnych o mocy nie większej niż i. Z lematu 1 wynika, że dwa zespoły minimalne mogą być albo wzajemnie rozłączne, albo też jeden z nich zawiera się w drugim, a zatem

$$|X| \geq \sum_{k=1}^{|X|-(i+1)} (i+k)\, l_{i+k}^{(i)}, \tag{4.2}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, |X|-2$. Maksymalizując wartość sumy

$$W(i) = \sum_{k=1}^{|X|-(i+1)} l_{i+k}^{(i)}, \tag{4.3}$$

względem $l_{i+k}^{(i)}$, $k = 1, 2, \ldots, |X|-2$ przy ograniczeniu danym wzorem (4.2) otrzymujemy następujące rozwiązanie

$$l_{i+1}^{(i)} = \text{entier}\left[\frac{|X|}{i+1}\right]$$

$$l_{i+k}^{(i)} = 0, \text{ dla } k = 2, 3, \ldots, |X|-2$$

9

Wynika stąd, że majorantę dla ciągu $|X|$, $W(1)$, $W(2)$, ..., $W(|X|-2)$ stanowi $|X|-1$ pierwszych wyrazów ciągu harmonicznego, a więc mamy nie więcej niż

$$|X| [\gamma + \ln(|X|-1) + 1] \tag{4.4}$$

wszystkich zespołów minimalnych w zbiorze X. Porównanie liczb przedstawionych we wzorach (4.1) i (4.4) wybitnie świadczy na niekorzyść metody wyznaczania zespołów minimalnych posługującej się wyłącznie zależnościami przedstawionymi w rozdziale 2. Należy zatem zastanowić się nad skonstruowaniem algorytmu typu agregacyjnego, tzn. takiego, który w kolejnych iteracjach wykorzystywałby wyniki (w tym przypadku uprzednio już wyznaczone zespoły minimalne) uzyskane w poprzednich iteracjach. Podstawę do przypuszczenia, że taki algorytm da się stworzyć stanowi treść lematu 1.

Dla uproszczenia i skrócenia dalszych zapisów wprowadzimy teraz oznaczenia obowiązujące do końca tej pracy. Niech I będzie niepustym zbiorem indeksów, zaś $\{ Q_i : i \in I \}$ indeksowaną rodziną zbiorów, $Q_i \in X$, $i \in I$. Oznaczymy

$$Q_I = \bigcup_{i \in I} Q_i \tag{4.5}$$

Na przykład Z_T należy rozumieć jako sumę mnogościową wszystkich elementów Z_i, $i \in T$ odpowiednio określonej indeksowanej rodziny zbiorów $\{ Z_i : i \in T \}$.

<u>Stwierdzenie</u> <u>1</u>. *Niech I będzie niepustym skończonym zbiorem indeksów, $\{ S_i : i \in I \}$ – rodziną indeksowaną parami rozłącznych zespołów minimalnych, $\{ R_i : i \in I \}$ – rodziną indeksowaną zbiorów spełniających warunek mówiący, że dla każdego $i \in I$ zachodzi $R_i \subset S_i$, $R_i \neq S_i$, oraz niech $K(\{R_i : i \in I\}) = \{j : j \in I , R_j \neq \emptyset \}$. Niech ponadto $Q \subset X$ będzie dowolnym zbiorem takim, że $S_I \cap Q = \emptyset$ i $S_I \cup Q \neq X$. Jeśli zachodzi co najmniej jedna z następujących nierówności $|Q| |K(\{R : i \in I\})| > 0$ lub $|K(\{R : i \in I\})| \geq 2$, to $P = Q \cup R_I$ nie jest zespołem minimalnym. Poza tym warunek $Q \neq \emptyset$ implikuje relację*

$$f(P, X-P) > f(Q, X-Q) \tag{4.6}$$

<u>Dowod</u>. Rozpatrzmy dowolny wstępujący ciąg $(K(i): i \in K(\{R_i : i \in I\}))$ podzbiorów mnogości $K(\{R_i : i \in I\})$ określony przez $K(i) = \{u : u \in K(\{R_i : i \in I\}), u \leq i\}$. Dowód bedzie przebiegać przez indukcję względem $|K(i)|$.

Dla wygody dalej będziemy pisać $P_{|K(i)|}$ i $S_{|K(i)|}$ zamiast odpowiednio $Q \cup R_{K(i)}$ oraz $S_{K(i)}$. Ponadto oznaczymy $R_{(i)} = P_{|K(i)|} - P_{|K(i)|-1}$ i $S_{(i)} = S_{|K(i)|} - S_{|K(i)|-1}$ dla $i \in K(\{R_i : i \in I \})$, przyjmując iż $P_0 = Q$ i $S_0 = \emptyset$.

Niech $Q \neq \emptyset$.

1. $|K(i)|=1$. Mamy więc $f(P_1, X-P_1) - f(Q, X-Q) = f(R_1, X-(R_1 \cup Q)) - f(Q, R_1) \geq f(R_1, S_1 - R_1) - f(Q, R_1)$. Ponieważ S_1 jest zespołem minimalnym, więc

$$f(R_1, S_1 - R_1) > f(R_1, X-S_1) \tag{4.7}$$

zgodnie z definicją 1. Odejmując $f(R_1, Q)$ od obydwu stron (4.7) otrzymujemy $f(R_1, S_1 - R_1) - f(R_1, Q) > f(R_1, X - (S_1 \cup Q))$, gdzie prawa strona ostatniej nierówności jest nieujemna w myśl definicji funkcji f. Oznacza to, że $f(P_1, X-P_1) > f(Q, X-Q)$, czyli że P_1 nie jest zespołem minimalnym, a ponadto iż zachodzi (4.6).

2. Przypuśćmy teraz, że P_i nie jest zespołem minimalnym dla każdego i spełniającego nierówność $1 \leq i \leq |K(\langle R_i : i \in I\rangle)|$, a ponadto, że zachodzi zależność

$$f(P_i, X-P_i) > f(Q, X-Q), \tag{4.8}$$

dla każdego z wyżej określonych indeksów i. Można napisać $f(P_{i+1}, X-P_{i+1}) = f(P_i \cup R_{(i+1)}, X-(P_i \cup R_{(i+1)})) = f(P_i, X-P_i) + \alpha$, gdzie $\alpha = f(R_{(i+1)}, S_{(i+1)} - R_{(i+1)}) + f(R_{(i+1)}, X-(P_i \cup S_{(i+1)})) - f(P_i, R_{(i+1)})$. Ponieważ $S_{(i+1)}$ jest zespołem minimalnym, więc $f(R_{(i+1)}, S_{(i+1)} - R_{(i+1)}) > f(R_{(i+1)}, X - S_{(i+1)})$ zgodnie z definicją 1, gdyż $\emptyset \neq R_{(i+1)} \subset S_{(i+1)}$, $R_{(i+1)} \neq S_{(i+1)}$. Ponadto $X - S_{(i+1)} \supset P_i$, co wynika z określenia indeksowanej rodziny zbiorów $\langle S_i : i \in I\rangle$. Wobec tego $f(P_i, R_{(i+1)}) = f(R_{(i+1)}, P_i) \leq f(R_{(i+1)}, X - S_{(i+1)})$ zgodnie z definicją funkcji f. Wynika stąd, że $f(R_{(i+1)}, S_{(i+1)} - R_{(i+1)}) > f(P_i, R_{(i+1)})$, co pociąga za sobą nierówność $\alpha > 0$, tzn. $f(P_{i+1}, X-P_{i+1}) > f(P_i, X-P_i)$. Po skorzystaniu z (4.8) otrzymamy $f(P_{i+1}, X-P_{i+1}) > f(Q, X-Q)$, tzn. P_{i+1} nie może być zespołem minimalnym, co kończy drugi krok indukcyjny i zarazem cały dowód dla przypadku $Q \neq \emptyset$.

Jeśli $Q \neq \emptyset$, to przyjęte założenia implikują nierówność $|K(\langle R_i : i \in I\rangle)| \geq 2$. Z lematu 2 wynika, że P_2 nie jest zespołem minimalnym. Oznaczymy teraz $\overline{Q} = P_1$, $\overline{P}_i = P_{i+1}$, $i = 1, 2 \ldots, |K(\langle R_i : i \in I\rangle)| - 1$. Widać teraz, że drugą część dowodu dla przypadku $Q = \emptyset$ sprowadza się do uprzednio rozpatrzonego wariantu, w którym zamiast Q i P_i należy uwzględnić, odpowiednio, $\overline{Q}$ i $\overline{P}_i$, cnd.

11

Stwierdzenie 2. *Niech I, $\{S_i : i \in I\}$ oraz $K(\{R_i : i \in I\})$ mają to samo znaczenie co w stwierdzeniu 1. Jeśli $|K(\{R_i : i \in I\})| \geq 1$, to spełniona jest następująca nierówność:*

$$f(R_I,\ X - R_I) > \max\{f(S_i,\ X - S_i) : i \in K(\{R_i : i \in I\})\} \qquad (4.9)$$

Dowod. Dowód zostanie przeprowadzony indukcyjnie. Jeśli $|K(\{R_i : i \in I\})| = 1$, to (4.9) wynika wprost z lematu 2. Przypuśćmy teraz, że

$$f(R_{K(i)},\ X - R_{K(i)}) > \max\{f(S_i,\ X - S_i) : i \in K(i)\} \qquad (4.10)$$

zachodzi dla każdego i, $1 \leq |K(\{R_i : i \in I\})|$, przy czym $K(i)$ jest określone w ten sam sposób jak w dowodzie stwierdzenia 1. Oznaczając $\overline{Q} = R_{K(1)}$, $\overline{P}_i = R_{K(i)}$ i przeprowadzając taką samą konstrukcję jak bezpośrednio poniżej wzoru (4.8) otrzymujemy $f(\overline{P}_{i+1},\ X - \overline{P}_{i+1}) > f(\overline{P}_i,\ X - \overline{P}_i)$, tzn.

$$f(R_{K(i+1)},\ X - R_{K(i+1)}) > f(R_{K(i)},\ X - R_{K(i)}) \qquad (4.11)$$

Biorąc teraz $Q^* = R_{i+1}$ oraz $P^*_{i+1} = \overline{P}_{i+1}$ mamy $f(P^*_{i+1},\ X - P^*_{i+1}) > f(Q^*,\ X - Q^*)$ zgodnie ze stwierdzeniem 1., a więc

$$f(R_{K(i+1)},\ X - R_{K(i+1)}) > f(R_{i+1},\ X - R_{i+1}) \qquad (4.12)$$

Ponieważ S_{i+1} jest zespołem minimalnym, $\emptyset \neq R_{i+1} \subset S_{i+1}$, $R_{i+1} \neq S_{i+1}$, więc z lematu 2 wynika, że $f(R_{i+1},\ X - R_{i+1}) > f(S_{i+1},\ X - S_{i+1})$, a więc po skorzystaniu z (4.12) otrzymujemy

$$f(R_{K(i+1)},\ X - R_{K(i+1)}) > f(S_{i+1},\ X - S_{i+1}) \qquad (4.13)$$

Założenie indukcyjne (4.10) i nierówność (4.11) wraz z relacją (4.13) implikują $f(R_{K(i+1)},\ X - R_{K(i+1)}) > \max\{f(S_{i+1},\ X - S_{i+1}),\ \max\{f(S_i,\ X - S_i) : i \in K(i)\}\} = \max\{f(S_i,\ X - S_i) : i \in K(i+1)\}$, co kończy drugi krok indukcyjny, a zarazem cały dowód.

Stwierdzenie 3. *Niech I oraz $\{S_i : i \in I\}$ mają to samo znaczenie co w stwierdzeniu 1. Jeśli S_J nie jest zespołem minimalnym dla każdego $J \subset I$, $|J| \geq 2$, to zachodzi nierówność*

$$f(S_I,\ X - S_I) \geq \min\{f(S_i,\ X - S_i) : i \in I\} \qquad (4.14)$$

Dowod. Ponieważ S_J nie jest zespołem minimalnym, więc zgodnie z lematem 2 musi istnieć niepusty zbiór R taki, że $R \subset S_J$ oraz

$$f(S_J,\ X - S_J) \geq f(R,\ X - R) \qquad (4.15)$$

Niech $I = J$, $|I| = 2$. Jeśli $R \subset S_1$, to

$$f(R,\ X - R) \geq f(S_1,\ X - S_1), \qquad (4.16)$$

(równość zachodzi w przypadku $R = S_1$) w myśl lematu 2, a więc po skorzystaniu z (4.15) otrzymujemy (4.14). Jeśli zaś R nie stanowi podzbioru S_1, to albo $R \subset S_2$, albo też $R \cap S_1 \neq \emptyset$. W pierwszym z wymienionych przypadków postępujemy analogicznie jak wyżej. Przypuśćmy teraz, że $R \not\subset S_1$ i $R \cap S_1 \neq \emptyset$. Wtedy można napisać $R = R_1 \cup Q$, gdzie $R_1 = R \cap S_1$, $Q = R - R_1 \neq \emptyset$, a więc wtedy po skorzystaniu ze stwierdzenia 1 otrzymujemy $f(R, X - R) = f(R_1 \cup Q, X - (R_1 \cup Q)) > f(Q, X - Q)$. Ponieważ $R \subset S_{\{1,2\}}$, więc $Q \subset S_2$, tzn. $f(Q, X - Q) \geq f(S_2, X - S_2)$ zgodnie z lematem 2 (równość zachodzi w przypadku $Q = S_2$). Mamy zatem $f(R, X - R) \geq f(S_2, X - S_2)$ i znowu po skorzystaniu z (4.15) uzyskujemy (4.14) dla $I = \{1, 2\}$, co kończy pierwszą część dowodu.

Przypuśćmy teraz, że dla każdego niepustego L, $|L| < |I|$, zachodzi

$$f(S_L, X - S_L) \geq \min\{f(S_i, X - S_i): i \in L\} \tag{4.17}$$

Niech $k \in I - L$. Oznaczymy $J = L \cup \{k\}$. Analogicznie jak przedtem możemy założyć istnienie niepustego zbioru R, $R \subset S_J$ spełniającego (4.15). Jeśli istnieje taki indeks $i \in J$, że $R \subset S_i$, to $f(R, X - R) \geq f(S_i, X - S_i)$ zgodnie z lematem 2, a więc po uwzględnieniu (4.15) otrzymujemy (4.14). W przeciwnym przypadku można napisać $R = R_A \cup S_B$, gdzie $\emptyset \neq A \cup B \subset J$, $A \cap B = \emptyset$. Jeśli $B = \emptyset$, to można zastosować stwierdzenie 2 i po uwzględnieniu (4.15) mamy

$$f(S_J, X - S_J) \geq \min\{f(S_i, X - S_i): i \in J\} \tag{4.18}$$

Jeśli $A = \emptyset$, to albo $|B| = 1$ (przypadek ten został już rozważony w wariancie $R \subset S_i$), albo też $|B| \geq 2$ i wówczas z (4.15) i (4.17) wynika (4.18), gdyż $f(R, X - R) = f(S_L, X - S_L)$ dla $L = B$ oraz $\min\{f(S_i, X - S_i) : i \in B\} \geq \min\{f(S_i, X - S_i) : i \in J\}$ jeśli tylko $B \subset J$.

Pozostał jeszcze do rozpatrzenia wariant, w którym A, $B \neq \emptyset$. Oznaczając $Q = S_B$ możemy zastosować stwierdzenie 1, skąd otrzymamy $f(R, X - R) > f(S_B, X - S_B)$ i dalej skorzystać z argumentów przytoczonych podczas rozważania przypadku $A = \emptyset$. cnd.

Po zastosowaniu prawa kontrapozycji do stwierdzenia 3 i po uwzględnieniu treści wniosku 1 otrzymujemy

Twierdzenie 1. *Dla każdego* $x \in X$ $\{x\}$ *jest zespołem minimalnym. Ponadto, niech* I *będzie niepustym skończonym zbiorem indeksów, a* $\{S_i : i \in I\}$ – *rodziną indeksowaną parami rozłącznych zespołów minimalnych takich, że dla każdego* $J \subset I$, $1 < |J| < |I|$, S_J *nie jest zespołem minimalnym. Nierówność*

$$f(S_I, X - S_I) < \min\{f(S_i, X - S_i): i \in I\} \tag{4.19}$$

jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy S_I *jest zespołem minimalnym.*

Twierdzenie 1 pokazuje jak konstruować zespoły minimalne wykorzystując znajomość uprzednio już wyznaczonych zespołów minimalnych. Wagę omawianego twierdzenia można najlepiej pokazać na przykładzie. Przypuśćmy, że rozpatrujemy zagadnienie, w którym $|X| > 200$ i znaleźliśmy już 4 zespoły minimalne S_i o jednakowej mocy $|S_i| = 50$, $i = 1, 2, 3, 4$. Dla zbadania czy $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ jest zespołem minimalnym w przypadku wykorzystania wprost lematu 2 należałoby przeprowadzić $2^{200} - 2 \approx 1{,}607 \times 10^{60}$ testów, zaś twierdzenie 1 umożliwia osiągnięcie tego samego celu po dokonaniu tylko 4 testów.

5. Związki między zespołami minimalnymi a przekrojami w grafie

Twierdzenie 1 i lemat 1 umożliwiają sukcesywnie (tzn. po każdorazowym znalezieniu zespołu minimalnego) zmniejszać wymiarowość zadania. Mianowicie każdy wyszukany zespół minimalny, np. S, jest zastępowany pojedynczym elementem nowego zbioru, powiedzmy X', modyfikowane są dziedzina i wartość funkcji wagowej f, powiedzmy $f' : \{\{A, B\} : A, B \subset X'\} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ i przystępuje się do poszukiwania zespołu minimalnego w zmodyfikowanym systemie X', f' zamiast X, f. Ponieważ $|X'| = |X| - |S| + 1$, więc liczba godnych rozpatrzenia wariantów maleje asymptotycznie $2^{|S|-1}$ -krotnie (por. wzór (4.1)), pozostaje jednakże dalej w związku wykładniczym z liczbą dzielonych elementów (tzn. elementów zbioru X'). Zachodzi pytanie czy nie ma możliwości takiego usystematyzowania przeglądu podzbiorów dzielonej mnogości (najpierw X, potem X', X'' itd.) aby po pierwszenie nie rozpatrywać niepotrzebnie niektórych podzbiorów (z porównania liczb przedstawionych w (4.1) i (4.4) wynika, że takich podzbiorów jest znakomita większość), po wtóre zaś ażeby nie pominąć żadnego zespołu minimalnego. Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna i będzie przedstawiona dokładniej w treści bieżącego rozdziału.

Wprowadzimy teraz nowy symbol umożliwiający wygodne zapisywanie zależności omawianych w bieżącym rozdziale. Niech mianowicie będzie dane odwzorowanie

$$E : 2^X \times 2^X \longrightarrow 2^{\{\{x, y\} : x, y \in X, x \neq y\}} \cup \{\emptyset\},$$

o wartościach określonych dla każdej pary niepustych podzbiorów A_1, A_2 mnogości X w następujący sposób:

$$E(A_1, A_2) = \{\{x, y\} : x \in A_1, y \in A_2, x \neq y\}$$

14

oraz

$$E(\emptyset,\ A_2) = E(A_1,\ \emptyset) = E(\emptyset,\ \emptyset) = \emptyset,$$

gdzie $\langle x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n \rangle$ oznacza jak zwykle n-kę nieuporządkowaną, zaś 2^X jest zbiorem potęgowym mnogości X. Odwzorowanie E jest oczywiście symetryczne (tzn. $E(A,\ B) = E(B,\ A)$) i ponadto posiada ciekawą właściwość

$$E(A_1,\ A_2) \cap E(D_1,\ D_2) = \tag{5.1}$$
$$= E(A_1 \cap D_1,\ A_2 \cap D_2) \cup E(A_1 \cap D_2,\ A_2 \cap D_1),$$

którą dowodzi się w sposób trywialny.

Przedstawiony w rozdziale 2 model wygodniej teraz będzie opisać w języku teorii grafów. Będziemy mianowicie rozpatrywać niezorientowany ważony graf zupełny bez pętli własnych (G, w), $G = (X,\ E(X,\ X))$, gdzie X jest zbiorem wierzchołków grafu, $E(X,\ X)$ - zbiorem krawędzi grafu zupełnego, zaś $w(x,\ y) = f(\langle x \rangle,\ \langle y \rangle)$ (patrz poniżej wzoru (2.1)) jest nieujemną wagą rzeczywistą przypisywaną $\langle x,\ y \rangle \in E(X,\ X)$.

Macierz przepustowości grafu ważonego (G, w) (a terminal capacity matrix [3]) jest macierzą kwadratową $|X|\times|X|$, której $(x,\ y)$-ty element, $x \neq y$, jest równy wartości $V[C(x;\ y)]$ przekroju minimalnego $C(x;\ y)$ rozdzielającego wierzchołki x i y, $x,\ y \in X$, zaś na głównej diagonali (èlementy $(x,\ x)$-te) posiada ona element neutralny. Kilka różnych grafów może mieć taką samą macierz przepustowości. O każdym z nich mówimy, że realizuje on daną macierz przepustowości. Przypuśćmy teraz, że $\mathbf{M} = [m_{xy}]_{|X|\times|X|}$ jest macierzą kwadratową z elementem neutralnym e na głównej przekątni. Jeśli sukcesywna i równoczesna zamiana wierszy i kolumn tej macierzy (równoczesna, tzn. taka, w której zamianie x-tego wiersza z y-tym towarzyszy zaraz potem zamiana x-tej kolumny z y-tą) prowadzi do uzyskania nowej macierzy o następującej postaci blokowej

$$\mathbf{M}^P = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{M}_{(a)} & \mathbf{M}_{(c)} \\ \hdashline \mathbf{M}_{(d)} & \mathbf{M}_{(b)} \end{array}\right], \tag{5.2}$$

gdzie $\mathbf{M}_{(a)}$ i $\mathbf{M}_{(b)}$ są znowu macierzami kwadratowymi zawierającymi e na głównych diagonalach, a ponadto każdy element $\mathbf{M}_{(c)}$ przybiera tę samą wartość równą $\min\langle m_{xy} : x,\ y \in X,\ x \neq y \rangle$, to $\mathbf{M}^P$ nosi nazwę podziału głównego (principal partition [3]) macierzy $\mathbf{M}$, zaś $\mathbf{M}_{(a)}$ i $\mathbf{M}_{(b)}$ nazywane są głównymi podmacierzami macierzy $\mathbf{M}$. O ważności pojęcia podziału głównego macierzy przepustowości grafu ważonego świadczy następujące twierdzenie (patrz np. Theorem 12-2-1 w [3] i jego dowód na s. 431-434 tamże):

Twierdzenie 2. *Symetryczna macierz kwadratowa* $|X|\times|X|$ *jest macierzą przepustowości grafu ważonego o zbiorze wierzchołków* X *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podział główny wspomnianej macierzy, a także podziały główne każdej z głównych podmacierzy macierzy wyjściowej, podziały główne głównych podmacierzy macierzy wyjściowej itd. (podziały główne przeprowadzone są do momentu, w którym rozważana (dzielona) podmacierz nie stanie się macierzą jednoelementową składającą się jedynie z elementu neutralnego e) Ponadto każda macierz przepustowości posiada realizację drzewiastą.*

Udowodnimy teraz następującą właściwość:

Stwierdzenie 4. *Każda macierz przepustowości niezorientowanego grafu ważonego posiada realizację w postaci ścieżek.*

Dowod. Niech T_k będzie macierzą $k\times k$ przepustowości pewnego niezorientowanego grafu ważonego o k wierzchołkach. Z twierdzenia 2 wynika, iż T_k posiada realizację drzewiastą o k wierzchołkach. Dowód przebiega indukcyjnie z uwagi na wartość przybieraną przez k.

Dla $k = 1$ realizację stanowi po prostu pojedynczy wierzchołek. Dla $k = 2$ drzewem realizującym T_2 jest oczywiście ścieżka składająca się z dwu wierzchołków i łączącej je krawędzi.

Przypuśćmy teraz, że teza jest spełniona dla każdego k, $1 \le k \le r$, przy czym $r \ge 2$ i rozważmy T_{r+1}. Twierdzenie 2 zapewnia o istnieniu takiej permutacji $\pi(X)$ wierszy (i, oczywiście, jednocześnie kolumn) macierzy T_{r+1}, że po ustawieniu według niej wierszy (i kolumn) macierzy wyjściowej T_{r+1} otrzymamy, powiedzmy $\mathbf{M}^P$ jak w (5.2). Oznaczymy $T_p = \mathbf{M}_{(a)}$ i $T_q = \mathbf{M}_{(b)}$. Z twierdzenia 2 wynika, że T_p i T_q są także macierzami przepustowości niezorientowanego grafu ważonego (gdyż są one kwadratowe, zawierają element neutralny e na głównej przekątni i istnieją ich podziały główne, podziały główne ich podmacierzy głównych, itd.). Zatem do T_p i T_q odnosi się treść założenia indukcyjnego, gdyż $p + q = r + 1$ oraz $1 \le p,\ q \le r$. Niech $(P_p,\ w_p)$ i $(P_q,\ w_q)$ będą niezorientowanymi ścieżkami ważonymi realizującymi, odpowiednio, T_p i T_q. Łatwo zauważyć, że połączenie jednego z wierzchołków końcowych ścieżki $(P_p,\ w_p)$ z jednym z wierzchołków końcowych ścieżki $(P_q,\ w_q)$ krawędzią o wadze równej elementowi podmacierzy $\mathbf{M}_{(c)}$ stanowi szukaną realizację dla T_{r+1}.cnd.

W dalszych rozważaniach będzie przydatna następująca właściwość (patrz np. Theorem 2-2-1 i Theorem 5-1-1 w [3], ich dowody tamże oraz definicja odwzorowania E - w tym rozdziale):

Lemat 3. *Niech A będzie niepustym podzbiorem mnogości X, $A \neq X$. Wówczas $E(A,\ X - A)$ jest przekrojem w niezorientowanym grafie zupełnym bez pętli własnych $G = (X,\ E(X,\ X))$. Ponadto, dla każdego przekroju C w G istnieje niepusty podzbiór A mnogości wierzchołków X, $A \neq X$, taki, że $C = E(A,\ X - A)$.*

Przeprowadzimy teraz następującą konstrukcję. Niech S będzie zespołem minimalnym, $|S| > 1$. Rozpatrzmy dwa różne wierzchołki wzięte z X powiedzmy x i s, zakładając, iż $x \in S$. Niech $C = C(x;\ s)$ będzie przekrojem w G rozdzielającym x oraz s. Lemat 3 implikuje istnienie niepustego B, $B \neq X$, dla którego $C = E(B,\ X - B)$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, iż $x \in B$ oraz $s \in X - B$. A zatem

$$A_1 = B \cap S \neq \emptyset \tag{5.3}$$

Określimy ponadto

$$A_2 = (X - B) \cap S\ ,\quad A_3 = (X - B) \cap (X - S)\ ,\quad A_4 = B \cap (X - S) \tag{5.4}$$

Łatwo zauważyć, iż $B = A_1 \cup A_4$ oraz $X - B = A_2 \cup A_3$, a więc wartość $V[C]$ przekroju C wyniesie

$$V[C] = f(A_1 \cup A_4,\ A_2 \cup A_3) \tag{5.5}$$

Z definicji 1 wynika

$$f(A_1,\ A_2) > f(A_1,\ A_3 \cup A_4) \tag{5.6}$$

$$f(A_1,\ A_2) > f(A_2,\ A_3 \cup A_4) \tag{5.7}$$

Załóżmy teraz, iż A_2, A_3 i A_4 są niepuste i oznaczmy $f_{ij} = f(A_i,\ A_j)$, $i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ i \neq j$. Wówczas (5.6) i (5.7) możemy przepisać w postaci

$$f_{12} > f_{13} + f_{14}\ , \tag{5.8}$$

$$f_{12} > f_{23} + f_{24}\ , \tag{5.9}$$

a więc

$$f_{12} + f_{13} > f_{14}\ , \tag{5.10}$$

$$f_{12} + f_{24} > f_{23}\ , \tag{5.11}$$

ponieważ f_{13}, $f_{24} \geq 0$. Dodając stronami $f_{24} + f_{34}$ do (5.10) oraz $f_{13} + f_{34}$ do (5.11) otrzymamy

$$V[C] > \max(f(A_3,\ A_1 \cup A_2 \cup A_4),\ f(A_4,\ A_1 \cup A_2 \cup A_3)) \tag{5.12}$$

(ten sam rezultat choć w inny sposób uzyskał Nieminen, patrz [4] s. 48). Ponadto po dodaniu stronami $f_{23} + f_{24}$ do (5.8) i $f_{13} + f_{14}$ do (5.9) uzyskamy

$$f(A_1 \cup A_2,\ A_3 \cup A_4)$$
$$< \min(f(A_1,\ A_2 \cup A_3 \cup A_4),\ f(A_2,\ A_1 \cup A_3 \cup A_4)) \tag{5.13}$$

(Nieminen [4] nie brał pod uwagę tego przypadku, w związku z czym jego dowód jest niekompletny).

Jeśli albo $A_3 = \emptyset$, albo też $A_4 = \emptyset$, to wyżej przedstawiona konstrukcja też jest prawidłowa (w pierwszym przypadku mamy tylko $f_{13} = f_{23} = f_{34} = 0$, w drugim zaś, odpowiednio, $f_{14} = f_{24} = f_{34} = 0$). Wariant $A_3 \cup A_4 = X - S$ nie jest możliwy, gdyż przeczy on definicji zespołu minimalnego ($S \neq X$).

Możemy teraz przystąpić do dowodu stwierdzenia 5:

<u>Stwierdzenie 5</u> . *Niech S, $|S| > 1$ będzie zespołem minimalnym, x, z - jego różnymi elementami, a ponadto $y \in X - S$. Wówczas zachodzi nierówność*

$$V[C_m(x;\ z)] > V[C_m(x;\ z)] \ , \tag{5.14}$$

przy czym $C_m(a;\ b)$ oznacza przekrój minimalny rozdzielający wierzchołki a i b grafu G.

<u>Dowod</u> . Dla każdego przekroju rozdzielającego x, $z \in S$, $x \neq z$, przyjęcie, iż $x \in A_1$ implikuje $z \in A_2$, tzn. $A_2 \neq \emptyset$, gdzie A_1 i A_2 są dane przez (5.3) i (5.4). Wobec tego możemy się odwołać do konstrukcji przedstawionej poniżej lematu 3. C_m $(x;\ z)$ musi przybrać jedną z następujących postaci (patrz lemat 3) : $E(A_1 \cup A_4,\ A_2 \cup A_3)$, $E(A_1,\ A_2 \cup A_3 \cup A_4)$, bądź $E(A_2,\ A_1 \cup A_3 \cup A_4)$. Z (5.13) oraz (5.12) i (5.5) wynika jednak, iż dla każdego ze wspomnianych wariantów istnieje przekrój rozdzielający $x \in A_1$ i $y \in A_3 \cup A_4$, którego wartość jest mniejsza .cnd.

<u>Twierdzenie 3</u> .*Niech S będzie zespołem minimalnym. Wówczas z dowolnej ścieżki realizującej macierz przepustowości niezorientowanego grafu ważonego $(G,\ w)$ bez pętli własnych można wybrać podścieżkę o zbiorze wierzchołków równym S.*

<u>Dowod</u> . Rozważmy przypadek $|S| > 1$ (wariant $|S| = 1$ jest trywialny) i przypuśćmy, że teza nie jest spełniona. Ścieżce realizującej macierz przepustowości odpowiadają dokładnie dwie permutacje jej wierzchołków $\pi_1(X)$ i $\pi_2(X)$ określone w następujący sposób : $\pi_i(1)$ przybiera wartość jednego (wybranego) z wierzchołków końcowych ścieżki, $\pi_i(2)$ jest wierzchołkiem połączonym krawędzią z $\pi_i(1)$,.., $\pi_i(k)$ jest wierzchołkiem połączonym krawędzią z $\pi_i(k-1)$, $2 \leq k \leq |X|$, $i = 1,\ 2$. Rozważmy dowolnie wybraną ze wspomnianych permutacji oznaczając ją przez $\pi(X)$.

Ponieważ $S \subset X$, $S \neq \emptyset$, więc istnieje taki indeks k, $1 \leq k \leq |X| - |S| + 1$, że $\pi(k) \in S$ i albo $H = \emptyset$ dla $k = 1$, albo też $H \cap S = \emptyset$, gdzie $H = \{\pi(j) :\ j < k\}$. Przyjęte w dowodzie założenie implikuje istnienie wskaźnika $q > k$ takiego, że $\pi(q) \in X - S$ i $\pi(q+1) \in S$. Wobec tego $V[C_m(x;\ z)] \leq V[C_m\ (x;\ y)]$, gdzie $x = \pi(q+1)$, $y = \pi(q)$, $z = \pi(k)$, co wynika wprost z właściwości ścieżki realizującej macierz przepustowości niezorientowanego grafu ważonego i pozostaje w sprzeczności ze stwierdzeniem 5. cnd.

Twierdzenie 3 stanowi odpowiedź na pytanie postawione we wstępie do bieżącego rozdziału. Mianowicie okazuje się rzeczą zbędną rozważanie wszystkich możliwych podzbiorów mnogości X w celu wyznaczenia zespołów minimalnych. Do rozwiązania zagadnienia wystarczy skonstruować dowolną ścieżkę realizującą macierz przepustowości grafu (G, w), a następnie rozpatrywać jej podścieżki czyli po kolei (patrz też lemat 1) pary, trójki, czwórki, itd. sąsiadujących ze sobą na ścieżce elementów. Ponieważ mamy dokładnie $|X| - 1$ wspomnianych par, $|X| - 2$ trójek i, ogólnie, $|X| - n + 1$ n-ek, więc w sumie w najgorszym przypadku wystarczy rozpatrzeć nie więcej niż $O(|X|^2)$ możliwości, co stanowi znaczny postęp w porównaniu z liczbą wariantów przedstawioną we wzorze (4.1). Powracając chociażby do przykładu przedstawionego pod koniec rozdziału 4 można stwierdzić, że stosując twierdzenie 3 i nie uwzględniając twierdzenia 1 zamiast $1,607 \times 10^{60}$ testów wystarczy teraz przeprowadzić ich tylko nie więcej niż 40 000. Oczywiście prawidłowo skonstruowany algorytm służący do wyznaczania zespołów minimalnych powinien uwzględniać zarówno mechanizmy implikowane przez twierdzenie 1 jak i wnioski wynikające z twierdzenia 3.

6. Uwagi i wnioski końcowe

Pierwszą propozycję (i definicję) zastosowania zespołów minimalnych do (sub)optymalizacji płytek obwodów drukowanych można znaleźć w [2]. Zaproponowano tam także pierwszy algorytm wyszukiwania zespołów minimalnych, skonstruowany jednak przede wszystkim na podstawie odpowiednika lematu 2, a więc jak już uprzednio wykazano - niezwykle nieefektywny. Ponadto w pracy [2] ograniczono przeciwdziedzinę funkcji f do liczb naturalnych, co utrudniło uwzględnienie szerokości ścieżek w trakcie projektowania. Przełom w teorii zespołów minimalnych stanowiły dwie prace : Nieminena [4] i Stańczaka [8]. Odkrycie związków między przekrojami minimalnymi i zespołami minimalnymi [4] umożliwiło skonstruowanie pierwszego algorytmu wyznaczającego zespoły minimalne o wielomianowej złożoności obliczeniowej (patrz [8]). W prezentowanej pracy po raz pierwszy przedstawiono w języku polskim rozumowanie (i nowe, zrewidowane i skrócone dowody znanych już przedtem zależności, a także nowe związki) prowadzące do efektywnego algorytmu wyznaczania zespołów minimalnych (lepszego od algorytmu pokazanego w pracy [8]). Sam algorytm zostanie omówiony w następnym opracowaniu.

Literatura

1. Bretschneider G., Goldbrunner E.: *Ein Beitrag zur Bestimmung der wirtschaftlich optimale Lage von Orstvermittlungsstelen mit Hilfe von Datenverarbeitungsanlangen*. NTZ, 1966, t. 19, nr 8, s. 455-459.
2. Luccio F., Sami M.: *On the Decomposition of Networks in Minimally Interconnected Subnetworks*, IEEE Transactions on Circuit Theory, 1969, t. CT-16, nr 2, s. 184-188.
3. Mayeda W.: *Graph Theory*. John Wiley, New York 1972.,
4. Nieminen J,: *On Minimally Interconnected Subnetworks of a Network*. Control and Cybernetics, 1980, t. 9, nr 1-2,s. 47-52.
5. *OrCAD*. OrCAD Systems Corporation 1986.
6. *Redboard Reference Manual*. Racal - Redac 1987.
7. *smARTWORK: Printed - Circuit - Board Artwork Software Reference Manual*. Wintek Corporation, Lafayette 1986.
8. Stańczak W.: *An Efficient Algorithm for Partitoning a Network into Minimally Interconnected Subnetworks*. Control and Cybernetics, 1984, t. 13, nr 1-2, s. 97-112.