PRZEMYSŁOWY INSTYTUT AUTOMATYKI I POMIARÓW
MERA-PIAP
Al. Jerozolimskie 202 02-222 Warszawa Telefon 23-70-81

440 BE10

ZESPÓŁ URZĄDZEŃ I SYSTEMÓW STEROWANIA

Główny wykonawca dr inż. Wiesław Stańczak

Wykonawcy

Konsultant

Nr zlecenia S1318

Komputerowa implementacja algorytmu wyszukiwania wąskich gardeł w infrastrukturze technicznej przepływu informacji w przedsiębiorstwie

Zleceniodawca

Pracę rozpoczęto dnia 92.08.15 zakończono dnia 92.12.15

Z-ca Dyrektora d/s Bad.-Rozwojowych dr inż. J. Jabłkowski

Kierownik Zespołu dr inż. A. Syryczyński

Praca zawiera:

stron 8
rysunków
fotografii
tabel
tablic
załączników

Rozdzielnik - ilość egz:

Egz. 1 BOINTE
Egz. 2 ZSS
Egz. 3 ZSS
Egz. 4
Egz. 5
Egz. 6

Nr rejestr. 6923

1

**Analiza deskryptorowa**

PRZEPUSTOWOŚĆ SIECI + TEORIA GRAFÓW + ALGORYTM + OPROGRAMOWANIE

**Analiza dokumentacyjna**

Skonstruowano model infrastruktury technicznej przedsiębiorstwa z punktu widzenia przepływu informacji. Model posłużył do sformułowania metody /algorytmu/ wyszukiwania "wąskich gardeł" w tej strukturze. Na podstawie algorytmu opracowano realizujący go program, przeznaczony do przetwarzania na komputerze kompatybilnym z IBM - PC.

**Tytuły poprzednich sprawozdań**

**UKD**

PIAP-252/83-6000

## 1. Wstęp

Analizując pracę przedsiębiorstwa niejednokrotnie dochodzimy do wniosku, że pewne jego działy pracują gorzej od innych. Nie zawsze jest to wynikiem niższych kwalifikacji pracowników w nich zatrudnionych, bądź ich opieszałości. Może też szwankować przepływ informacji.

## 2. Model zagadnienia

Stosowane obecnie w przedsiębiorstwach współczesne środki przepływu informacji są to zazwyczaj urządzenia telekomunikacyjne częstokroć sprzężone z komputerami i sprzętem peryferyjnym maszyn matematycznych. Zaliczyć do nich można sieć telefoniczną i sieci komputerowe jak np. wykorzystywany w małych biurach lub do zastosowań w księgowości Novell firmy Netware, w bankowości - systemy wielodostępne najczęście oparte na wykorzystaniu systemu UNIX, wreszcie w biurach kostrukcyjnych dużych koncernów przemysłowych sieci Ethernet zgodne ze standardem IEEE 802.3. W tym ostatnim przypadku sieć obsługuje również inne wydziały, a najczęściej całe przedsiębiorstwo.

Graf niezorientowany (dalej nazywany krótko grafem) jest parą uporządkowaną $G = \langle X, E \rangle$, gdzie $X$ nosi nazwę zbioru wierzchołków, zaś mnogość krawędzi $E$ stanowi podzbiór zbioru par nieuporządkowanych utworzonych z elementów $X$, czyli $\{\{x, y\} : x, y \in X\}$.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do grafów bez pętli własnych, tzn. założymy, że do $E$ nie należą elementy o postaci $\{x, x\} \in X$. Nasuwa się tu następująca interpretacja: pojedynczy wierzchołek grafu można utożsamiać z miejscem udostępniania usług przesyłu informacji (aparat telefoniczny, komputer włączony do sieci, końcówka komputerowa np. do wprowadzania danych lub służąca celom projektanckim) lub z komórką organizacyjną przedsiębiorstwa dysponującą wymienionym wyżej sprzętem. Wybór jednej ze wspomnianych możli-

3

wości zależy od zakładanego poziomu wnikliwości tworzonego modelu i nie powinien mieć większego wpływu na wyniki końcowe, poza oczywistym faktem, że proces obliczeniowy związany z modelem bardziej szczegółowym będzie trwać dłużej i, być może, będzie wymagał większych zasobów wykorzystywanego do rozwiązywania komputera. Krawędzie grafu odpowiadają wzajemnym relacjom między poszczególnymi obiektami odwzorowanymi w postaci wierzchołków, dokładniej zaś: $\{x, y\} \in E$, wtedy i tylko wtedy, gdy obiekty $x$ oraz $y$, $x, y \in X$, komunikują się ze sobą (wariant modelu zapotrzebowania) albo są ze sobą połączone bezpośrednio siecią komputerową, ewentualnie dysponują aparatami telefonicznymi pracującymi w tej samej sieci wewnątrzzakładowej (wariant modelu zasobów technicznych).

Jeśli dodatkowo przyjmiemy, że każdej krawędzi $e = \{x, y\} \in E$ jest przyporządkowany element w ze zbioru $W$, czyli że istnieje odwzorowanie $w: E \longrightarrow W$, to parę uporządkowaną $\langle w, G\rangle$ nazwiemy grafem ważonym krawędziowo, zaś poszczególne $w(e) = w(x, y)$ - wagami krawędzi, ze względów historycznych spotykamy się również z określeniem przepustowość krawędzi (edge capacity).

W rozwijanym tu modelu zakładamy, że $W = \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$, przy czym przypadek $w(e) = 0$ utożsamiamy z brakiem krawędzi $e$. Takie podejście jest wygodne zarówno ze względów formalnych jak i niejednokrotnie obliczeniowych. Pozwala mianowicie z jednej strony stosować aparat czystej teorii grafów, z drugiej zaś strony wykorzystywać metody macierzowe w zastosowaniu do grafu pełnego (grafu Kuratowskiego) $K = \langle X, \{\{x, y\}: x \neq y, x, y \in X\}\rangle$. W omawianym modelu wagę krawędzi $w(x, y)$ interpretuje się jako zapotrzebowanie na skomunikowanie się obiektu $x$ z obiektem $y$ (wariant modelu zapotrzebowania), ewentualnie jako przepustowość binarną środków technicznych łączących obiekty $x$ oraz $y$ (wariant modelu zasobów technicznych). W tym ostatnim wariancie, w przypadku korzystania z łącza typu magistalowego należy przyjmować przepustowość przydzieloną konkretnemu obiektowi, np. przepustowość binarną odniesioną do średniego czasu dysponowania uprawnieniem do transmisji.

Graf G nazywamy grafem spójnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary jego różnych wierzchołków $x, y \in X$ można skonstruować ciąg na przemian występujących wierzchołków i krawędzi o postaci $x, \{x, v_0\}, v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \dots v_{r-1}, \{v_{r-1}, v_r\}, v_r, \{v_r, y\}, y$ (zwany ścieżką - path lub simple path), przy czym $\{x, v_0\}, \{v_i, v_{i+1}\}, \{v_r, y\} \in E$ oraz $v_i \in X$ dla każdego $i = 0, 1, r - 1$.

Odpowiada to istnieniu przejścia między każdą parą wierzchołków grafu, przy czym wędrówka odbywa się wyłącznie po jego krawędziach, a w naszym przypadku - możliwości skomunikowania się, chociaż być może przy skorzystaniu z pośrednictwa. Przy rozpatrywaniu wprowadzonego wyżej ważonego grafu Kuratowskiego należy dodatkowo zażądać, aby wagi przypisane krawędziom w ścieżce były nieujemne, tzn żeby $w(x, v_0), w(v_i, v_{i+1}), w(v_r, y) > 0$ dla każdego $i = 1, 2, r - 1$.

Przekrojem w grafie spójnym nazywamy taki minimalny podzbiór C mnogości jego krawędzi E, którego usunięcie spowoduje utratę spójności. Inaczej mówiąc, jeśli graf $G = \langle X, E\rangle$ jest spójny, to C jest jego przekrojem wtedy i tylko wtedy, gdy graf $\langle X, E - C\rangle$ nie jest spójny, zaś każdy graf o postaci $\langle X, E - (C - H)\rangle$, gdzie $\emptyset \neq H \neq C$, $H \subset C$ (tzn. graf, z którego usunięto nie wszystkie krawędzie tworzące przekrój) pozostaje dalej grafem spójnym.

Usunięcie przekroju $C \subset E$ z grafu $G = \langle X, E\rangle$ powoduje rozbicie zbioru jego wierzchołków X na dwa niepuste, wzajemnie rozłączne podzbiory, powiedzmy na X oraz Y. Jeśli $x \in X$ i $y \in Y$, to zgodnie z powyższymi uwagami w $\langle X, E - C\rangle$ nie istnieje ścieżka łącząca x oraz y i dlatego C jest w tym przypadku nazywany przekrojem rozdzielającym x oraz y, co podkreśla się pisząc $C = C(x; y)$. W rozwijanym modelu przekrój odpowiada technicznym środkom łączeniowym, których usunięcie, badź awaria spowoduje zaniknięcie możliwości komunikowania się między pewnymi grupami obiektów.

Przyjęcie w grafie ważonym krawędziowo <w, G> = <w: E --> W, <X, E>>, że $W = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ umożliwia wprowadzenie pojęcia wagi (przepustowości) przekroju C określanej jako suma wag krawędzi tworzących tenże przekrój.

Jak więc widać zagadnienie wyszukiwania wąskich gardeł w infrastrukturze technicznej przepływu informacji w przedsiębiorstwie można sprowadzić do określania przekrojów minimalnych w odpowiednio skonstruowanym grafie ważonym krawędziowo.

W konkretnym grafie ważonym krawędziowo zazwyczaj istnieje wiele różnych przekrojów. Teoretycznie (i praktycznie) największe znaczenie mają tzw. przekroje minimalne definiowane jako przekroje, których waga w określonej klasie przekrojów jest najmniejsza. I tak rozpatruje się minimalny przekrój rozdzielający C(x; y) daną parę różnych wierzchołków, jak i przekrój minimalny dla całego grafu. Podczas realizacji pracy skonstruowano program rozwiązujący to pierwsze zagadnienie. W uwagach końcowych zostanie pokazane, że otrzymane narzędzie umożliwia również znalezienie przekroju minimalnego dla całego grafu.

## 3. Program wyznaczający przekroje minimalne

Algorytm wyznaczania przekroju minimalnego rozdzielającego dwa zadane wierzchołki grafu ważonego krawędziowo zostal po raz pierwszy skonstruowany przez Forda i Fulkersona [3], a następnie zweryfikowany, poprawiony i ulepszony przez Edmondsa i Karpa [2]. Ponieważ klasa zagadnienień, do których rozwiązywania służy omawiany algorytm jest istotna zarówno z punktu widzenia teorii jak i praktyki, więc pomimo że dysponowano już sposobem rozwiązywania problemu, czyniono dalej wysiłki ukierunkowane na zwiększenie efektywności metody, czyli na skrócenie czasu obliczeń. Duży wkład w tę dziedzinę mają matematycy byłego Związku Radzieckiego, a przede wszystkim Dinic [1], Karzanow [5] i Czerkaski (oryginalny tekst pracy Czerkaskiego nie jest autorowi znany, informacje ha temat udziału Czerkaskiego zostały zaczerpnięte z artykułu Galila [4]). Edmonds i Karpa [2] zaproponowali odpowiednie uporządkowanie operacji przeglądania grafu, w ten sposób nie tylko zwiększając efektywność oryginalnej metody Forda i Fulkersona [3] ale zarazem doprowadzając do skończoności algorytmu (pierwotna wersja w przypadku specyficznie skonstruowanych danych nie dawała wyników w skończonej liczbie kroków). Wkład szkoły radzieckiej polegał na wprowadzeniu pewnych dodatkowych konstrukcji (pomysł Dinica [1] rozwinięty później przez Karzanowa [5] i Czerkaskiego), w wyniku czego nastapiło dalsze uporządkowanie głównej części algorytmu, a w rezultacie skrócenie czasu obliczeń (w przypadku algorytmu Edmondsa i Karpa - $O(|E|^2|X|)$, - Dinica - $O(|E||X|^2)$, - Karzanowa - $O(|X|^3)$, - Czerkaskiego $O(|X|^2|E|^{1/2})$, gdzie O oznacza "proporcjonalne do", zaś |.| - moc zbioru [należy tu wspomnieć, że dla grafu pełnego $|E| = 0,5 * |X|(|X| - 1)$, a więc $O(|E|) = O(|X|^2)$]. W programie zastosowano metodę Galila [4] (oszacowanie $O(|V|^{5/3}|E|^{2/3})$), stanowiącą ulepszenie podejścia Czerkaskiego, a do konstrukcji pomocniczych użyto szybkiej procedury zaproponowanej przez Malhotrę, Kumara i Maheshwari [6].

Program został napisany dla systemu operacyjnego DOS (wersja źródłowa - w języku C, potem skompilowana i skonsolidowana przy użyciu pakietu Microsoft PDS C ver. 6.00A). Przed wywołaniem programu należy w tym samym katalogu, w którym znajduje się program umieścić plik o nazwie DANE (bez rozszerzenia), w którym umieszczona jest symetryczna macierz kwadratowa zawierająca wagi poszczególnych krawędzi grafu. Program sam rozpoznaje wymiarowość zagadnienia (tzn. liczbę wierzchołków - obecna wesja dopuszcza grafy do 100 wierzchołków [automatycznie ponumerowanych od 0 do 99]),

7

sprawdza prawidłowość sporządzenia danych (m. in. symetrię macierzy i czy ich liczba stanowi kwadrat pewnej liczby naturalnej), po czym wyświetla dane na ekranie monitora, a po komendzie operatora przystępuje do obliczeń.

W przypadku stwierdzenia błędu (np. nieodpowiednie dane, graf niespójny) program informuje o tym użytkownika stosownym komunikatem na ekranie, po czym kończy pracę.

Gdy brak nieprawidłowości - obliczenia prowadzone są przy założeniu, że poszukiwany jest minimalny przekrój rozdzielający wierzchołki "0" oraz "1". Po zakończeniu przetwarzania na ekranie monitora ukazuje się wartość przekroju oraz informacja o rozbiciu mnogości wszystkich wierzchołków na dwie wzajemnie rozłączne klasy (por. tekst w p. 2 poniżej definicji przekroju w grafie).

Plik DANE można przygotowywać posługując się dowolnym edytorem tekstowym, który na wyjściu umożliwia otrzymanie formatu ASCII. Poszczególne wagi krawędzi należy wprowadzać jako liczby całkowite w zakresie od 0 do 32767. Nie dozwala się stosowania żadnych dodatkowych znaków wewnątrz poszczególnych liczb. Dwie kolejne dane można oddzielać od siebie pojedynczym znakiem nie będącym cyfrą w systemie dziesiętnym, który jednakże musi występować bezpośrednio po ostatniej cyfrze liczby. Po ostatniej liczbie też musi pojawiać się znak oddzielający. Każdą liczbę wolno poprzedzać dowolnie wiele razy użytym znakiem spacji, tabulacji, powrotu karetki, bądź zmiany wiersza.

## 4. Uwagi końcowe

Wbrew pozorom dla określenia wszystkich "wąskich gardeł" w sieci łączącej n obiektów wcale nie trzeba stosować 0,5 * n(n - 1) razy omówionego wyżej oprogramowania. Otóż w książce [7] udowodniono (por. rozdział 12.2 w [7]), iż z pojęciem przekroju w grafie można wiązać pewien rodzaj



8

symetrycznych macierzy kwadratowych posiadających specyficzne właściwości (tzw. właściwość sukcesywnego podziału głównego - principal partition). Stąd Mayeda wywnioskował, że w grafie o n wierzchołkach istnieje co najwyżej n - 1 różnych wartości przekrojów minimalnych rozdzielających poszczególne pary różnych wierzchołków, co w oczywisty sposób przedstawia złożoność zagadnienia.

W przypadku poszukiwania minimalnego przekroju dla całego grafu należy postąpić w następujący sposób (dowód prawidłowości metody można znaleźć w [8] [Theorem 6]):

1. wyznaczamy przekrój minimalny rozdzielający dwa dowolnie wybrane wierzchołki, np. x oraz y;
2. łączymy ze sobą wierzchołki x oraz y, usuwamy krawędź {x, y}, wszystkie krawędzie {x, z} sklejamy z odpowiadającymi im krawędziami {y, z}, x, y $\neq$ z dla każdego z $\in$ X - {x, y}, zarazem sumując przypisane im wagi;
3. w tak zmienionym (i zarazem mniejszym) grafie znowu szukamy przekroju minimalnego rozdzielającego nowe x i dowolnie wybrany wierzchołek, powiedzmy inne y;
4. powtarzamy kroki 2 i 3 aż do wyczerpania się wierzchołków (a więc n - 1 razy);
5. znaleziony uprzednio minimalny przekrój rozdzielający, dla którego stwierdzono, że posiada wartość nie większą od wartości określonych dla innych przekrojów stanowi przekrój minimalny dla całego grafu.

Literatura


1. Dinic E.A.:Algoritm reszenija zadaczi o maksimalnom potokie w sieti so stepiennoj ocenkoj. Dokl. Akademii Nauk SSSRP, t. 194 Nr 4, 754-757.
2. Edmonds J., Karp R.M.: Theoretical improvements in algorithnic efficiency for network flow problem. Journal of ACM, Vol. 19, No 2, 248-264.
3. Ford L.R., Fulkerson D.R.: Przepływy w sieciach. Warszawa, PWN, 1969.

4. Galil Z.: An $O(V^{5/3}E^{2/3})$ algorithm for the maximal flow problem. Acta Informatica, Vol. 14 No 2, 221-242
5. Karzanow A.V.: Determining the maximal flow in a network by the method of preflows. Soviet Math. Dokl. Vol. 15 No 3, 434-437.
6. Malhotra V.M., Kumar P.M., Maheshwari S.N.: An $O(V^3)$ algorithm for finding the maximal flows in networks. Information Processing Lett., Vol. 7 No 2, 277-278.
7. Mayeda W.: Graph Theory. New York, John Wiley, 1972.
8. Stańczak W.: An efficient algorithm for partitioning a network into minimally interconnected subnetworks. Control and Cybernetics, Vol. 13 No 1-2, 97-112.