

prof. dr hab. inż. Wiktor Taranenko
mgr inż. Jakub Szabelski
Politechnika Lubelska,
doc. dr inż. Georgij Taranenko
Narodowy Uniwersytet Techniczny w Sewastopolu

PODSTAWY IDENTYFIKACJI UKŁADU DYNAMICZNEGO TOCZENIA WAŁÓW O MAŁEJ SZTYWNOŚCI

Dążenie do osiągnięcia wysokiej jakości obróbki części na obrabiarkach skrawających w warunkach działania na układ technologiczny różnych zakłóceń doprowadziło do powstania układów sterowania adaptacyjnego. Opracowanie modelu matematycznego układu dynamicznego adekwatnego do oryginału, jest niezbędną przesłanką odpowiedniego podejścia do rozwiązania zagadnienia analizy stabilności układu sterowania automatycznego i syntezy członów korygujących wg wymaganych wskaźników jakości sterowania parametrami przejściowymi. Przedstawiono metodologię opracowania modelu matematycznego układu dynamicznego toczenia wałów w stanie sprężysto-odkształcalnym i sam model. Model został opracowany na podstawie identyfikacji analitycznej. Przedstawiono układ równań i uogólniony schemat strukturalny modeli układu dynamicznego toczenia wałów, który uwzględnia geometrię warstwy skrawanej i siły skrawania przy toczeniu, właściwości sprężyste układu technologicznego, proces formowania przekroju warstwy skrawanej. Proces formowania przekroju WS uwzględnia zjawisko skrawania „po śladzie”. Pokazano specyfikę identyfikacji układu dynamicznego toczenia wałów o małej sztywności. Model matematyczny rozpatrywanego obiektu sterowania – UD ze sterowaniem stanem sprężysto – odkształcalnym części o małej sztywności budowany jest w oparciu o ogólne zasady budowy modeli układów dynamicznych obróbki mechanicznej, przy tym specyfika procesu obróbki części o małej sztywności uwzględniana jest przez wprowadzenie odpowiednich równań więzów, odzwierciedlających dodatkowe odkształcenia sprężyste w jednym z równań opisujących siłowe oddziaływania sterujące. Porównanie MM obiektu dla różnych oddziaływań siłowych pokazuje, że przy wprowadzeniu dodatkowych oddziaływań siłowych, obiekt charakteryzuje się znacznie mniejszą inercyjnością w porównaniu do przypadku sterowania według kanału posuwu.

THE BASIS OF IDENTIFYING DYNAMIC SYSTEMS OF MACHINING SMALL STIFFNESS SHAFTS

Pursuit of achieving the high quality of part processing using machines under conditions of operating various disturbances on the technological system (TS) resulted in introducing adaptive controlling systems (AC). Developing the mathematical model (MM) of the dynamic controlling object, adequate to the original object is the indispensable premise of choosing the suitable approach to the question of stability analysis for automatic controlling system as well as synthesis of devices correcting sets coefficients of controlling quality using transitory parameters.

The methodology of building the mathematical model of dynamic system of shafts turning under the condition of elastic strain and the model itself were introduced. The model was worked out basing on the analytic identification. The system of equations and general structural pattern of MM system of dynamic turning were introduced. Such prepared system of equations and structural pattern of MM takes into account the geometry of machined layer and forces of cutting during the turning, elastic properties of TS and the process of forming the section of the machined layer (ML). The process of forming the ML section takes into account the phenomenon of machining "after the trace". The specification of DS identifying for turning the small stiffness shafts was shown. The mathematical model of controlling object CO-DS controlling the elastic strain state is built on the general principle of building models of the dynamic systems of machining small stiffness elements. The specification of processing small stiffness part is taken into account by introducing suitable equations of constrains reflecting additional elastic strain in one of equations describing controlling force. MM objects comparison for various force influences shows, that after introducing additional force influences, the object characterizes in smaller infertility in comparison to the case of steering according to the channel of feed. Higher coefficients of the quality of dynamic control and effective reducing the disturbances caused by changing of allowance and hardness of machined elements, can be achieved by changing their stiffness along the processing in ACS and AC of elastic strain condition of element.

WSTĘP

Zagadnienie zwiększenia dokładności i efektywności obróbki może być rozwiązane zarówno w wyniku zastosowania metod opartych na polepszeniu technologicznych charakterystyk obrabiarek i narzędzi, projektowania procesów technologicznych z wymaganą dokładnością, jak i w wyniku bezpośredniego sterowania parametrami skrawania, układem sprężystym, zakłóceniami występującymi w procesie obróbki.

Dążenie do uzyskania wysokiej jakości obróbki na obrabiarkach skrawających w warunkach oddziaływania na układ technologiczny (*UT*) różnych zakłóceń doprowadziło do zastosowania w przemyśle maszynowym układów sterowania adaptacyjnego (*AC*) [1, 2]. Problem doskonalenia takich układów jest szczególnie aktualny w warunkach *ESP* przy realizacji tzw. technologii „bezludnej”.

Dlatego, przy ocenie dokładności projektowanych układów sterowania automatycznego (*UAS*) i *AC*, jednym z pierwszoplanowych zagadnień jest opracowanie opisu matematycznego *UT*, rozpatrywanego jako obiekt sterowania.

Przy braku wystarczająco pełnej i dokładnej informacji o obiekcie sterowania (*OS*), charakterystyki obliczeniowe mogą się istotnie różnić od rzeczywistych. Wybrane przy projektowaniu parametry nastawienia regulatorów nie gwarantują wymaganej jakości sterowania, a nawet stabilności układu. Oprócz tego rozpatrywane układy charakteryzują się szerokim zakresem zmienności parametrów *OS*. W *UT* zawierających półfabrykat o małej sztywności, parametry mogą ulegać znacznej zmianie w trakcie cyklu obróbki jednej części. Te uwarunkowania wskazują na złożoność problemu zagwarantowania stabilności *UAS* i na konieczność szczególnie starannego podejścia do problemu określenia jego struktury i syntezy członów korygujących.

Opracowanie modelu matematycznego (*MM*) obiektu sterowania w dynamice, adekwatnego do obiektu – oryginału, jest konieczną przesłanką uzasadnionego podejścia do rozwiązania problemu analizy stabilności *UAS* i syntezy członów korygujących, zgodnie z wymaganymi wskaźnikami jakości sterowania procesem przejściowym. Przy tym w podobnych układach wskaźniki jakości sterowania współrzędną wyjściową – sprężystymi odkształceniami *UT* w dynamice bezpośrednio charakteryzują błędy kształtu części, uwarunkowane oddziaływaniem szybko zmieniających zakłóceń typu zmiana naddatku na obróbkę czy zmienność właściwości fizyko - chemicznych obrabianego materiału.

1. IDENTYFIKACJA UD TOCZENIA WAŁÓW

Metody budowy *MM OS* w znacznej mierze zależą od objętości wykorzystanej informacji apriorycznej, którą dysponujemy do momentu rozpoczęcia badań danego obiektu. Zadanie opracowania modelu może być zrealizowane w dwóch etapach. W pierwszym etapie na podstawie apriorycznych informacji o procesach fizycznych występujących w procesie technologicznym (*PT*) opracowuje się strukturę obiektu. Zwykle ten model zawiera nieznanne parametry, których znalezienie na podstawie danych apriorycznych jest skomplikowane lub niemożliwe. Pierwotny model strukturalny może zawierać elementy, które nie są niezbędne w następnych etapach opracowania *MM*. W trakcie drugiego etapu na podstawie badań eksperymentalnych określa się nieznanne parametry obiektu i doskonalą jego strukturę. W wielu przypadkach możliwe jest uproszczenie pierwotnej struktury modelu.

Układ dynamiczny (*UD*) procesu skrawania jest układem technologicznym – *OUPN*, tzn. obrabiarką wraz z realizowanym na niej procesem technologicznym obróbki skrawaniem (toczenie, szlifowanie, wiercenie, frezowanie) [3, 4].

W przypadku, kiedy istnieje pełna informacja o obiekcie sterowania, to możliwe jest opracowanie modelu metodą analityczną. Takie postępowanie prowadzące do poznania struktury i parametrów modelu nazywa się identyfikacją analityczną. Dla układów złożonych opracowanie *MM* metodą analityczną wymaga często dodatkowych badań eksperymentalnych w celu sprawdzenia otrzymanych wyników teoretycznych i określenia niektórych parametrów modelu.

Przedstawiony schemat budowy *MM* pokazuje, że podstawowy zakres badań przy opracowaniu *MM* opiera się na głębokiej analizie teoretycznej powiązań między zmiennymi parametrami i ujawnieniu zależności, opisujących procesy zachodzące w obiekcie.

Możliwość linearyzacji równań ruchu poszczególnych elementów *UD* wynika także z powszechnie uznanego poglądu, że zapewnienie wysokich wymagań odnośnie dokładności regulacji sprowadza się do realizacji układów regulacji, działających przy „małych” odchyleniach zmiennych. A więc *UD* procesu toczenia może być rozpatrywany jako wielowymiarowy *OS* z podukładami w postaci procesu technologicznego i układu sprężystego. Struktura *OS* zawiera obwody sprzężeń zwrotnych przez układ sprężysty spowodowane oddziaływaniami siłowymi, które pojawiają się podczas realizacji procesu technologicznego.

W pracach [4, 5] przedstawiono układ równań i uogólniony schemat strukturalny *MM* układu dynamicznego toczenia wałów. Opracowany układ równań i schemat strukturalny *MM* uwzględnia geometrię warstwy skrawanej i siły skrawania przy toczeniu, właściwości sprężyste *UT*, proces formowania przekroju warstwy skrawanej (*WS*). Proces formowania przekroju *WS* uwzględnia zjawisko skrawania „po śladzie”, które przejawia się w tym, że składowe warstwy skrawanej materiału w chwili bieżącej określone są przez chwilowe

położenie krawędzi ostrza oraz jego współrzędne w chwili poprzedniego obrotu półfabrykatu, tzn. w chwili opóźnionej o czas jednego obrotu. Jednocześnie uwzględniony jest wpływ odkształceń sprężystych dla współrzędnej Z na głębokość skrawania.

Układ równań opisujących obiekt sterowania – UD obróbki toczeniem może być przedstawiony w postaci:

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_f(s) &= M_x(s) \cdot \Delta a(s) + N_x(s) \cdot \Delta b(s) + C_x(s) \cdot \Delta q(s), \\ \Delta F_p(s) &= M_y(s) \cdot \Delta a(s) + N_y(s) \cdot \Delta b(s) + C_y(s) \cdot \Delta q(s), \\ \Delta F_c(s) &= M_z(s) \cdot \Delta a(s) + N_z(s) \cdot \Delta b(s) + C_z(s) \cdot \Delta q(s), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\Delta g_x(s) = H_{xx}(s) \cdot \Delta F_f(s), \quad \Delta g_y(s) = H_{yy}(s) \cdot \Delta F_p(s), \quad \Delta g_z(s) = H_{zz}(s) \cdot \Delta F_c(s), \quad (2)$$

$$\Delta a(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau}) \cdot \Delta v_f(s) - \frac{v_{n0} \cdot \tau}{s}(1 - e^{-s\tau}) \cdot \Delta n_{cz}(s) - (1 - e^{-s\tau}) \cdot \Delta g_x(s) - (1 - e^{-s\tau}) \cdot K_{\kappa_r} \cdot \Delta g_y(s), \quad (3)$$

$$\Delta b(s) = \frac{1}{s\tau}(1 - e^{-s\tau}) \cdot \Delta b_l(s) - \Delta b_r(s) - \Delta g_y(s) - K_{bz} \cdot \Delta g_z(s), \quad (4)$$

$$\Delta q(s) = \frac{1}{s\tau}(1 - e^{-s\tau}) \cdot \Delta q_l(s). \quad (5)$$

Równanie dla zastępczej grubości przekroju WS (3) otrzymano przy założeniu stałej prędkości obrotowej części. Jak pokazano dalej, sterowanie prędkością obrotową części powoduje pojawienie się w zależności (3) dodatkowej składowej w postaci:

$$-\frac{v_{n0} \cdot \tau}{s}(1 - e^{-s\tau}) \cdot \Delta n_{cz}(s).$$

Tak więc na proces formowania przekroju WS duży wpływ ma zjawisko skrawania „po śladzie” i odkształcenia sprężyste UD . Przy tym proces formowania przekroju WS może być opisany układem równań całkowo-różniczkowych z opóźnionym argumentem. Zmienne charakteryzujące przekrój WS zależą od zmiennych wejściowych i odkształceń sprężystych UD .

W strukturze dynamicznej identyfikowanego OS można wyróżnić podsystemy w postaci procesu technologicznego i układu technologicznego. Dla procesów technologicznych z występującymi oddziaływaniami siłowymi, co jest charakterystyczne dla obrabiarek, dynamiczna struktura obiektu zawiera obwody sprzężeń zwrotnych, uwarunkowane wzajemnym oddziaływaniem wskazanych układów.

W trakcie budowy MM dopuszczalna jest linearyzacja równań ruchu, opisujących UD obrabiarki, przy czym UD należy rozpatrywać jako obiekt wielowymiarowy, którego stan jest określony odpowiednimi zmiennymi.

Dla obrabiarek podstawowymi elementami wektora technologicznych zmiennych wejściowych procesu skrawania są chwilowe wartości grubości i szerokości warstwy skrawanej, a także twardości obrabianego materiału. Elementami wektora wyjściowego procesu technologicznego są składowe siły skrawania. Dynamiczne właściwości procesu skrawania mogą być opisane równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu.

W wektorze zmiennych technologicznych, tworzonym przez UD , można wyróżnić dwie składowe. Jedną z nich jest określona wektorem oddziaływań wejściowych, a druga – wektorem odkształceń sprężystych. Elementami wektora wielkości wejściowych są wielkości sterujące w postaci prędkości posuwu wzdłużnego, prędkości obrotowej części, a także zakłócenia w postaci zmiany twardości obrabianego materiału i nadatku względem długości i średnicy części. Wektor odkształceń sprężystych jest określony wektorami sił skrawania wielkości sterujących wchodzących do układu zapewnienia „wibrostanowienia”. Dynamiczne właściwości ekwiwalentnego układu sprężystego mogą być w przybliżeniu opisane równaniami drugiego rzędu [7]. Na wybór wektora zmiennych technologicznych istotny wpływ ma zjawisko skrawania „po śladzie”, przejawiające się tym, że chwilowe wartości składowych wspomnianego wektora są określone przez wartości elementów wektora wejściowego i wektora odkształceń sprężystych nie tylko w bieżącym momencie, ale także w momencie poprzedniego obrotu części. W wyniku tego UD jest opisywany układem równań całkowo-różniczkowych ze zmiennym opóźnionym argumentem.

W wyniku analizy procesów, zachodzących w UD obrabiarki, otrzymano układ równań i funkcje przejścia, a także uogólnioną strukturę obiektu sterowania.

2. SPECYFIKA IDENTYFIKACJI UD TOCZENIA WAŁÓW O MAŁEJ SZTYWNOŚCI

W celu zwiększenia dokładności obróbki wałów o małej sztywności opracowano sposoby technologiczne sterowania dokładnością, oparte na zmianie stanu sprężysto-odkształcalnego [9, 10]. Jako oddziaływania sterujące, zgodnie z opracowaną klasyfikacją [9], wykorzystywane są poszczególne siłowe oddziaływania regulacyjne lub ich kombinacja: rozciąganie osiowe i mimośrodowe; sterowanie dodatkowymi oddziaływaniami siłowymi, nakierowanymi na kompensację czynników siłowych od procesu skrawania; momenty zginające w podporach; sterowanie siłowymi odkształceniami zginająco-skręcającymi.

Modele matematyczne UT przy ustalonych parametrach otrzymano w postaci zależności funkcjonalnych, odzwierciedlających wpływ oddziaływań sterujących i zakłócających na wielkość odkształceń sprężystych części w rozpatrywanym przekroju. W oparciu o zasady mechaniki twardego ciała odkształconego otrzymano zależności funkcjonalne dla UT dla różnych stanów sprężysto-odkształcalnych części o małej sztywności.

MM różnych układów technologicznych obróbki ze sterowaniem stanem sprężysto-odkształcalnym dla ustalonych parametrów, przedstawionych w postaci funkcji ugięć otrzymane zostały przy założeniu, że siła zginająca działająca na część jest zewnętrzną zmienną niezależną od odkształceń sprężystych UT . Takie podejście oparte jest na nieuwzględnieniu zamknięcia układu sprężystego przez proces skrawania i nie wnosi istotnych błędów do wyników analizy charakterystyk statycznych OS . Analiza budowy odpowiedniego MM obiektu sterowania dla parametrów przejściowych jest niemożliwa bez uwzględnienia specyfiki procesów w strefie obróbki i zamknięcia UD przez proces skrawania.

MM rozpatrywanego obiektu sterowania – UD ze sterowaniem stanem sprężysto-odkształcalnym części o małej sztywności zbudowano w oparciu o ogólne zasady budowy MM układów dynamicznych [4, 5] obróbki mechanicznej, przy tym specyfika procesu obróbki części o małej sztywności uwzględniana jest poprzez wprowadzenie odpowiednich równań więzów [11, 12], odzwierciedlających wzajemne powiązania dodatkowych odkształceń sprężystych Δg_{ξ} , do jednego z równań zawierających siłowe oddziaływania sterujące układu równań (2).

Ekwiwalentne odkształcenia sprężyste UD przy obróbce części o małej sztywności można przedstawić w postaci dwóch składowych:

$$g_{\zeta} = g_{\zeta obr.} + g_{\zeta cz.}, \quad (6)$$

gdzie: $g_{\zeta obr.}$ i $g_{\zeta cz.}$ - odpowiednio odkształcenia sprężyste obrabiarki – przyrządu – narzędzia i części dla każdej współrzędnej; $\zeta \in \{x, y, z\}$. Pierwsza składowa w tym wyrażeniu dla rozpatrywanych UD , jest w zasadzie o rząd wielkości mniejsza i można jej nie uwzględniać.

Odkształcenia sprężyste UD w kierunku promieniowym g_y , zgodnie z równaniami ugięć [9], przy ustalonych parametrach bez uwzględniania zamkniętego układu sterowania obiektu, mogą być rozpatrywane jako deterministyczna nieliniowa funkcja parametrów części L, d, EI ; składowych siły skrawania F_c, F_p, F_f ; współrzędnych x przyłożenia siły skrawania po długości półfabrykatu i różnych oddziaływań sterujących w postaci: siły rozciągającej F_{x1} ; siły rozciągającej mimośrodowej, tworzącej dwa oddziaływania F_{x1} i momenty $M = F_{x1} \cdot e$, gdzie e - mimośród siły przy rozciąganiu; jednej lub kilku dodatkowych sił $F_{dod.i}$; momentów zginających M_i ; momentu skręcającego M_{skr} lub ich kombinacji:

$$g = f(L, d, EI, F_c, F_p, F_f, F_{x1}, e, F_{dod.i}, M_i, M_{skr}, x). \quad (7)$$

Uwzględniając, że rzeczywista prędkość posuwu wzdłużnego i prędkość zmiany współrzędnej x są względnie niewielkie, przy analizie procesów przejściowych można nie uwzględniać zmiany współrzędnej x w funkcji czasu. A więc jedno z równań (2) w postaci operatorowej można zapisać jako:

$$g_y(s) = K_{xy} \cdot F_f(s) + K_{yy} \cdot F_p(s) + K_{zy} \cdot F_c(s) + K_{F_{x1}} \cdot F_{x1}(s) + K_e \cdot e(s) + K_{F_{dod.i}} \cdot F_{dod.i}(s) + K_{M_i} \cdot M_i(s) + K_{M_{skr}} \cdot M_{skr}(s), \quad (8)$$

gdzie: podwójne indeksy przy współczynnikach K oznaczają, że współczynniki K_{xy}, K_{zy} pokazują wpływ przyrostu składowych F_f, F_c na przyrost odkształceń sprężystych po współrzędnej y ; $K_e = K_e' \cdot F_{x1_0}$. Współczynniki wzmocnienia równań liniowych określane są jako pochodne cząstkowe funkcji ugięć według odpowiedniej zmiennej. Na przykład dla UT obróbki przy działaniu osiowej siły rozciągającej F_{x1} , powodującej stan sprężyscie-odkształcalny z równań odkształceń sprężystych [9]:

$$K_{yy} = \left(\frac{\partial g_y}{\partial F_p} \right)_0 = \frac{L^3 \cdot [1 - \cos(2\pi x_0 / L)]^2}{2\pi^2 \cdot (4\pi^2 \cdot EI + F_{x1_0} \cdot L^2)}, \quad (9)$$

$$K_{F_{x1}} = \left(\frac{\partial g_y}{\partial F_{x1}} \right)_0 = - \frac{F_p \cdot L^5 [1 - \cos(2\pi x_0 / L)]^2}{2\pi^2 \cdot (4\pi^2 \cdot EI + F_{x1} \cdot L^2)} = - \frac{g_{y0} \cdot L^2}{4\pi^2 \cdot EI + F_{x1} \cdot L^2}, \quad (10)$$

gdzie: F_{x1_0}, g_{y_0} – wartości siły rozciągającej i sprężystego odkształcenia części po osi y w punkcie linearyzacji (wartości zmiennych odnośnie których podawane są przyrosty zmiennych).

W rozpatrywanym szczególnym przypadku pozostałe współczynniki w zależności (8) są równe zero. Współczynniki wzmocnienia, odpowiadające innym UD przy różnych sposobach obciążenia (przy zginaniu wzdłużno-poprzecznym) oraz różnych metodach zamocowania przy obróbce części sprężyste - odkształcalnych, zostały uzyskane analogicznie i zaprezentowane są w tab.1 – rubryka 2, x_0 - współrzędna położenia noża po długości obróbki w punkcie linearyzacji. Dodatkowe odkształcenia sprężyste g_x, g_z według współrzędnych x i z w wyniku działania rozpatrywanych siłowych oddziaływań sterujących, w zasadzie, nieistotnie wpływają na właściwości dynamiczne OS i można ich nie uwzględniać.

Tab. 1. Modele i współczynniki wzmocnienia w równaniach linearyzowanych MM

Nr modelu, Oddziaływanie sterujące, Źródło informacji	Współczynnik wzmocnienia w równaniach linearyzowanych MM
1	2
	Współczynnik wzmocnienia w równaniu linearyzowanym MM przy zginaniu wzdłużno-poprzecznym
Model 3.1 [9] Rozciąganie osiowe	$K_{yy} = \left(\frac{\partial g_y}{\partial F_p} \right)_0 = [(\beta\alpha L \operatorname{ch}\alpha L - \operatorname{sh}\beta\alpha L)(\operatorname{sh}\alpha x_0 - \alpha x_0) / \alpha F_{x1} (\alpha L \operatorname{ch}\alpha L - \operatorname{sh}\alpha L)] - [L(\beta \operatorname{sh}\alpha L - \operatorname{sh}\beta\alpha L)(\operatorname{ch}\alpha x_0 - 1) / F_{x1} (\alpha L \operatorname{ch}\alpha L - \operatorname{sh}\alpha L)],$ $K_{F_{x1}} = \left(\frac{\partial g_y}{\partial F_{x1}} \right)_0 = \{F_p \cdot [\beta L \alpha' \operatorname{ch}\alpha L + \beta L^2 \alpha' \operatorname{sh}\alpha L - \beta L \alpha' \operatorname{ch}\beta\alpha L] \{ \operatorname{sh}\alpha x_0 - \alpha x_0 \} + F_p (x_0 \alpha' \operatorname{ch}\alpha x_0 - x_0 \alpha') [\beta\alpha L \cdot \operatorname{ch}\alpha L - \operatorname{sh}\beta\alpha L] \} / \alpha F_{x1} (\alpha L \operatorname{ch}\alpha L - \operatorname{sh}\alpha L) - \{ \alpha^2 L \operatorname{ch}\alpha L - \alpha \operatorname{sh}\alpha L + \alpha F_{x1} (\alpha' L \operatorname{ch}\alpha L + \alpha L^2 \alpha' \operatorname{sh}\alpha L - \alpha' L \operatorname{ch}\alpha L) \} \times F_p [\beta\alpha L \operatorname{ch}\alpha L - \operatorname{sh}\beta\alpha L] \{ \operatorname{sh}\alpha x_0 - \alpha x_0 \} / \alpha^2 F_{x1}^2 (\alpha L \operatorname{ch}\alpha L - \operatorname{sh}\alpha L)^2 - F_p L [(\alpha' L \beta \operatorname{ch}\alpha L - \alpha' \beta \operatorname{ch}\alpha \beta L)(\operatorname{ch}\alpha x_0 - 1) + (\beta \operatorname{sh}\alpha L - \operatorname{sh}\alpha \beta L)] \{ \alpha' x_0 \operatorname{sh}\alpha x_0 - 1 \} \times 1 / F_{x1} (\alpha L \operatorname{ch}\alpha L - \operatorname{sh}\alpha L) - \{ \alpha L \operatorname{ch}\alpha L - \operatorname{sh}\alpha L + \alpha' F_{x1} \alpha L^2 \operatorname{sh}\alpha L + \alpha' L \operatorname{ch}\alpha L \} \times F_p L (\beta \operatorname{sh}\alpha L - \operatorname{sh}\alpha \beta L)(\operatorname{ch}\alpha x_0 - 1) / F_{x1}^2 (\alpha L \operatorname{ch}\alpha L - \operatorname{sh}\alpha L)^2,$ $\beta = \frac{L-a}{L}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{F_{x1}}{EI}}, \quad \alpha' = \frac{1}{2\sqrt{F_{x1}/EI}}.$

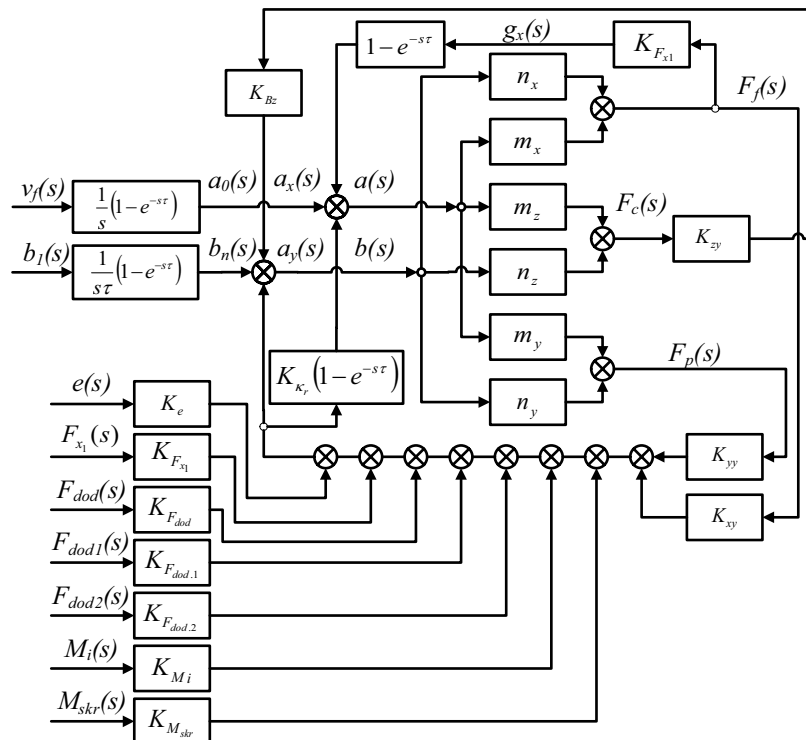
Tab. 1. Modele i współczynniki wzmocnienia w równaniach linearyzowanych MM (cd.)

1	2
Model 3.2 [9] Rozciąganie osiowe z zaciskiem w tulei sprężynującej	$K_{yy} = \left(\frac{\partial g_y}{\partial F_p} \right)_0 = \frac{L^3 \cdot [1 - \cos(2\pi x_0 / L)]^2}{\pi^2 \cdot [8\pi^2 \cdot EI + 2F_{x1} \cdot L^2]},$ $K_{F_{x1}} = \left(\frac{\partial g_y}{\partial F_{x1}} \right)_0 = -\frac{F_p \cdot L^5 \cdot [1 - \cos(2\pi x_0 / L)]^2}{2\pi^2 \cdot [4\pi^2 \cdot EI + F_{x1} \cdot L^2]}.$
Model 3.7 [9] Ściskanie mimośrodkowe	$K_{yy} = \left(\frac{\partial g_y}{\partial F_p} \right)_0 = [\alpha x_0 \beta \sin \alpha L - \sin \beta \alpha L \sin \alpha x_0] / (\alpha F_{x1} \cdot \sin \alpha L),$ $K_e = \left(\frac{\partial g_y}{\partial e} \right)_0 = -2\alpha x_0 \left(\frac{\cos \alpha L}{\sin \alpha L} - \frac{1}{\alpha L} \right) - 2(1 - \cos \alpha x_0) + 2 \frac{\cos \alpha L}{\sin \alpha L} (\alpha x_0 - \sin \alpha x_0),$ $K_{F_{x1}} = \left(\frac{\partial g_y}{\partial F_{x1}} \right)_0 = -\frac{1}{F_{x1}^2} \left\{ x_0 \beta F_p - \frac{x_0 F_p \sin \beta \alpha L}{\sin \alpha L} - 2M_2 \alpha x_0 \left(\operatorname{tg} \alpha L - \frac{1}{\alpha L} \right) - \right.$ $\left. - 2M_2 (1 - \cos \alpha x_0) + \left(\frac{F_p \cdot \sin \beta \alpha L}{\alpha \sin \alpha L} + 2 \operatorname{ctg} \alpha L \right) (\alpha x_0 - \sin \alpha x_0) \right\} +$ $+ \frac{1}{F_{x1}} \cdot \left\{ x_0 F_p \cdot (\alpha' L \sin \beta \alpha L \cdot \cos \alpha L) - \alpha' \beta L \cos \beta \alpha L \cdot \sin \alpha L \cdot (\sin^2 \alpha L - 2(\alpha' M_2 + \alpha e)) \times \right.$ $\times (\operatorname{ctg} \alpha L - 1 / \alpha L) + 2\alpha x_0 M_2 \left(\frac{\alpha L}{\sin^2 \alpha L} - \frac{\alpha'}{\alpha^2 L} \right) - 2(\alpha' M_2 + \alpha e) x_0 \sin \alpha x_0 +$ $\left. + \left(\frac{F_p \sin \beta \alpha L}{\alpha \sin \alpha L} + 2 \operatorname{ctg} \alpha L \right) \cdot (1 - \cos \alpha x_0) \alpha' x + (\alpha x_0 - \sin \alpha x_0) \times \right.$ $\left. \times \left[(F_p \alpha' \alpha \beta L \cos \beta \alpha L \sin \alpha L - F_p \sin \beta \alpha L [\alpha' \sin \alpha L + \alpha' \alpha L \cos \alpha L]) / \alpha^2 \sin^2 \alpha L - \frac{2\alpha' L}{\sin^2 \alpha L} \right] \right\}$ $\beta = \frac{L - \alpha}{L}, \quad M_2 = F_{x1} \cdot e, \quad \alpha = \sqrt{\frac{F_{x1}}{EI}}, \quad \alpha' = \frac{1}{2\sqrt{F_{x1}/EI}}.$

A więc właściwości rozpatrywanych UD przy toczeniu mogą być opisane układem równań (1) – (5), przy uwzględnieniu zależności (7):

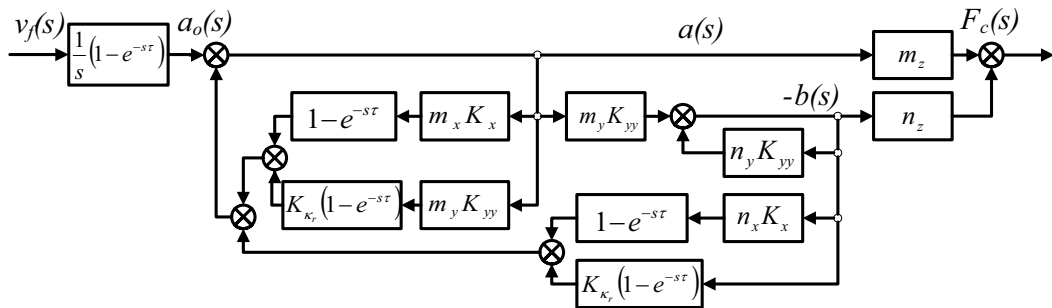
$$\left. \begin{aligned}
 F_\zeta(s) &= m_\zeta \cdot a(s) + n_\zeta \cdot b(s) + q_\zeta \cdot c(s), \\
 a(s) &= \frac{1}{s} (1 - e^{-s\tau}) \cdot v_f(s) - (1 - e^{-s\tau}) \cdot g_x(s) - K_{\kappa_r} (1 - e^{-s\tau}) \cdot g_y(s), \\
 b(s) &= \frac{1}{s\tau} (1 - e^{-e\tau}) \cdot b_1(s) - g_y(s) - K_{bz} \cdot g_z(s), \\
 g_x(s) &= K_x \cdot F_f(s), \quad g_z = K_z \cdot F_c(s), \\
 g_y(s) &= K_{xy} \cdot F_f(s) + K_{yy} \cdot F_p(s) + K_{zy} \cdot F_c(s) + K_{F_{x1}} \cdot F_{x1}(s) + \\
 &+ K_e \cdot e(s) + K_{Fdod.i} \cdot F_{dod.i}(s) + K_{M_i} \cdot M_i(s) + K_{M_{skr}} \cdot M_{skr}(s), \\
 c(s) &= \frac{1}{s\tau} (1 - e^{-s\tau}) \cdot c_1(s), \\
 \zeta &\in \{x, y, z\}.
 \end{aligned} \right\} (11)$$

Uogólniony schemat strukturalny *UD* toczenia wałków o małej sztywności w stanie sprężycie-odkształcalnym, odpowiadający układowi równań (11), przedstawiono na rys. 1. Na schemacie w celu zachowania jego większej pogładowości nie uwzględniono kanału oddziaływania odzwierciedlającego przyrost twardości $c(s)$ materiału obrabianego. Uwzględnienie siły składowej F_c , jak to odnotowano wyżej, prowadzi do pojawienia się w strukturze *OS* dodatkowego obwodu ujemnego sprzężenia zwrotnego. Należy zauważyć, że dla *PT* toczenia zewnętrznego wzrost odkształceń sprężystych dla współrzędnej *Z* prowadzi do zmniejszenia głębokości skrawania (sprężenie ujemne). Dla *PT* roztaczania odkształcenie sprężyste dla współrzędnej *Z* prowadzi do dodatniego przyrostu szerokości warstwy skrawanej. Powstający obwód dodatniego sprzężenia zwrotnego w strukturze dynamicznej obiektu może mieć istotny niekorzystny wpływ na jego stabilność.



Rys. 1. Wyjściowy schemat strukturalny OS

Na podstawie uogólnionej struktury można uzyskać transmitancję operatorową (*TO*) obiektu według różnorodnych oddziaływań. Z uwzględnieniem konkretnej specyfiki różnych *UD* w większości przypadków możliwa jest aproksymacja [13, 14] zależności dla *TO* układu dynamicznego, co upraszcza ich zastosowanie w praktyce inżynierskiej. Do sterowania procesem jako oddziaływanie sterujące często wykorzystywana jest wielkość prędkości posuwu wzdłużnego narzędzia, a jako wielkość regulowana przyjmowana jest jedna ze składowych siły skrawania, na przykład styczna F_c . Na podstawie analizy współczynników K_{xy} i K_{bz} można stwierdzić, że kanały sprzężenia zwrotnego przez pokazane współczynniki nie wpływają w istotny sposób na właściwości dynamiczne *OS* dla rozpatrywanej zmiennej wejściowej i wyjściowej. Przy tym schemat strukturalny *OS* sprowadza się do przedstawionego na rys. 2.



Rys. 2. Schemat strukturalny OS według oddziaływania sterującego – prędkości posuwu wzdłużnego $v_f(s)$

Zgodnie z otrzymanym schematem strukturalnym TO układu dynamicznego dla pokazanych współrzędnych:

$$G_{1z}(s) = \frac{F_c(s)}{v_f(s)} = \frac{m_z \cdot A(1 - e^{-s\tau})}{s \cdot [1 + B(1 - e^{-s\tau})]}, \quad (12)$$

gdzie:

$$A = 1 - \frac{n_z}{m_z} \cdot \frac{m_y K_{yy}}{1 + n_y K_{yy}}, \quad (13)$$

$$B = \frac{m_x K_x + K_{\kappa_r} \cdot m_y \cdot K_{yy} (2 + n_y \cdot K_{yy})}{1 + n_y \cdot K_{yy}}. \quad (14)$$

Zgodnie z wynikami badań [15] składowe siły skrawania bez uwzględnienia odkształcenia stykowego na powierzchni przyłożenia zapisywane są w postaci:

$$F_c = Q_{pw} \cdot a \cdot b, \quad F_p = Q_{pw} \cdot a \cdot b \cdot K'_y, \quad F_f = Q_{pw} \cdot a \cdot b \cdot K'_x,$$

gdzie: Q_{pw} - względna praca powstawania wióra, K'_y, K'_x - stałe współczynniki dla danych warunków skrawania.

Dlatego

$$m_z = \left(\frac{\partial F_c}{\partial a} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot b_0 \cdot K_z, \quad m_y = \left(\frac{\partial F_p}{\partial a} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot b_0 \cdot K_y, \quad m_x = \left(\frac{\partial F_f}{\partial a} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot b_0 \cdot K_x,$$

$$n_z = \left(\frac{\partial F_c}{\partial b} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot a_0 \cdot K_z, \quad n_y = \left(\frac{\partial F_p}{\partial b} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot a_0 \cdot K_y, \quad n_x = \left(\frac{\partial F_f}{\partial b} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot a_0 \cdot K_x$$

i

$$\begin{aligned} n_y m_x &= Q_{pw_0} a_0 K_y Q_{pw_0} b_0 K_x, & m_z n_x &= Q_{pw_0} b_0 K_z Q_{pw_0} a_0 K_x, \\ m_y n_x &= Q_{pw_0} b_0 K_y Q_{pw_0} a_0 K_x, & n_z m_x &= Q_{pw_0} a_0 K_z Q_{pw_0} b_0 K_x, \\ n_y m_x &= m_y n_x, & m_z n_x &= n_z m_x. \end{aligned}$$

Przytoczone zależności umożliwiają proste przekształcania współczynników A i B , wchodzących w odpowiednie TO OS według różnych oddziaływań sterujących i zakłócających.

Analogicznie można otrzymać TO układu dynamicznego toczenia według oddziaływań sterujących dla innych składowych siły skrawania, które po przekształceniu wchodzących w nie współczynników sprowadzane są do postaci:

$$G_{1x}(s) = \frac{F_f(s)}{v_f(s)} = \frac{m_x \cdot A(1 - e^{-s\tau})}{s \cdot [1 + B(1 - e^{-s\tau})]}, \quad (15)$$

$$G_{1y}(s) = \frac{F_p(s)}{v_f(s)} = \frac{m_y \cdot A(1 - e^{-s\tau})}{s \cdot [1 + B(1 - e^{-s\tau})]}. \quad (16)$$

Zależność (16) jest interesująca w przypadku obróbki wałów o małej sztywności, ponieważ odkształcenia sprężyste w wyniku działania właśnie składowej F_p siły skrawania okazują największy wpływ na dokładność obróbki wskazanych części.

W pracach [13, 14] rozpatrzono możliwość zamiany otrzymanych zależności TO (12), (15), (16) przybliżonymi, których zastosowanie istotnie upraszcza obliczenia charakterystyk modeli UD . Analiza została wykonana według kryterium dokładności odtworzenia przybliżonymi zależnościami rzeczywistych charakterystyk MM w płaszczyznach czasowej i częstotliwościowej; pokazano, że postać zależności aproksymujących należy wybierać z uwzględnieniem liczbowej wartości współczynnika B . Ustalono przy tym, że wartość $B = 0,1$ jest „graniczną”, przy której celowe jest przechodzenie od jednej postaci zależności aproksymującej do drugiej. Wartość współczynnika B według zależności (14) określana jest jako stosunek sztywności ekwiwalentnego układu sprężystego i współczynników wzmocnienia procesu skrawania i może być przyjmowana jako wskaźnik względnej sztywności UD . Szerokie zakresy zmiany parametrów obróbki na obrabiarkach, na przykład zmiana twardości obrabianego materiału, nadatku na obróbkę, geometrii ostrza, warunkują szerokie zakresy zmienności współczynników $m_x, m_y, K_{\kappa_r}, K_x, K_{yy}$ i, odpowiednio B .

Obliczenia pokazują, że przy obróbce wałów o małej sztywności, oraz przy obróbce zgrubnej i kształtującej części o sztywności normalnej, wartości współczynnika B są znacznie większe od wartości „granicznej” $B = 0,1$; w tym przypadku również zależności aproksymujące dla TO zgodnie z (11), (14), (15) celowo jest budować rozkładając funkcję wykładniczą $e^{-s\tau}$ w szereg Pade, który z zachowaniem dwóch pierwszych członów można zapisać jako:

$$e^{-s\tau} = \left(1 - \frac{1}{2}s \cdot \tau + \frac{1}{12}s^2 \cdot \tau^2\right) / \left(1 + \frac{1}{2}s \cdot \tau + \frac{1}{12}s^2 \cdot \tau^2\right).$$

Po przekształceniu zależności (12), (15), (16) TO układu dynamicznego sprowadza się do postaci typowych TO członów aperiodycznych drugiego rzędu:

$$G_{1\zeta}(s) = \frac{A \cdot m_\zeta \cdot \tau}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}, \quad (17)$$

gdzie:

$$\zeta = \{x, y, z\}$$

Ekwiwalentne stałe czasu określane są z zależności:

$$T_{1,2} = 0,5\tau \cdot \left[0,5 + B \pm \sqrt{(0,5 + B)^2 - 1/3} \right]. \quad (18)$$

TO obiektu według oddziaływania zakłócającego (w tym przypadku rozpatruje się zmianę naddatku na obróbkę) również zapisywane są zgodnie ze strukturą z rys. 2 i aproksymowane zależnościami aperiodycznymi:

$$G_{2\zeta}(s) = \frac{F_{\zeta}(s)}{b_1(s)} = \frac{n_{\zeta}}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}, \quad (19)$$

gdzie: $\zeta \in \{x, y, z\}$.

Dla *UD* o niskiej sztywności względnej ($B > 0,5 - 0,7$), stała czasowa T_2 zgodnie z zależnością (17) jest o rząd mniejsza od T_1 . Dlatego T_2 można nie uwzględniać i w przybliżeniu opisać właściwości dynamiczne obiektu *TO* członu aperiodycznego pierwszego rzędu. Z zależności (16) – (18) wynika, że parametry *OS* zmieniają się w szerokim zakresie przy zmianie parametrów obróbki. Na przykład na tokarkach uniwersalnych wielkość τ może zmieniać się od 10 do 20 razy, a wielkości m_{ζ}, n_{ζ} - od 5 do 10 razy. A więc współczynnik wzmocnienia *OS* dla rozpatrywanych oddziaływań zmienia się od 50 do 20 razy, a jego stałe czasowe 10 razy i więcej. Te warunki pokazują, że do sterowania takimi procesami należy zastosować *AC* [1, 2].

3. UPROSZCZENIE WYJŚCIOWEGO MODELU MATEMATYCZNEGO UD TOCZENIA WAŁÓW O MAŁEJ SZTYWNOŚCI

Struktura uogólniona *OS*, zbudowana w oparciu o układ równań (11) (rys. 2), umożliwia także wyodrębnienie właściwości *UD* w przypadku, kiedy jako współrzędna wyjściowa przyjmowany jest przyrost odkształceń sprężystych g_y w kierunku promieniowym, a jako oddziaływania wyjściowe – dodatkowe siły zewnętrzne, zmieniające stan sprężysto-odkształcalny części. Na przykład w przypadku sterowania stanem sprężysto-odkształcalnym części o małej sztywności poprzez przyłożenie siły rozciągającej F_{x1} struktura *OS* ulegnie przekształceniu do postaci pokazanej na rys. 3.

Na podstawie przytoczonego schematu po przekształceniu zależność dla *TO* układu dynamicznego, w przypadku, kiedy jako współrzędna wyjściowa przyjmowany jest przyrost odkształceń sprężystych g_y w kierunku promieniowym, sprowadza się do postaci:

$$G_{F_{x1}}(s) = \frac{g_y(s)}{F_{x1}(s)} = K_0 \cdot \frac{1 + A' \cdot (1 - e^{-s\tau})}{1 + B' \cdot (1 - e^{-s\tau})}, \quad (20)$$

gdzie:

$$K_0 = K_{F_{x1}} \cdot \frac{1}{1 + K_{yy} \cdot n_y + K_{xy} \cdot n_x + K_{bz} \cdot K_z \cdot n_z}, \quad (21)$$

$$A' = m_x \cdot K_x + K_{\kappa_r} \cdot m_y \cdot K_y, \quad (22)$$

$$G_{F_{x1}}(s) = \frac{g_y(s)}{F_{x1}(s)} = K_0 \cdot \frac{T_3^2 \cdot s^2 + 2\varepsilon \cdot T_3 \cdot s + 1}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}, \quad (26)$$

gdzie: ε - współczynnik tłumienia

$$\varepsilon = \frac{0,5 + A'}{0,577}. \quad (27)$$

W przypadku, kiedy $A' \geq 0,078$, zależność aproksymująca dla analizowanej *TO* przyjmuje postać:

$$G_{F_{x1}}(s) = \frac{g_y(s)}{F_{x1}(s)} = K_0 \cdot \frac{(T_4 \cdot s + 1) \cdot (T_5 \cdot s + 1)}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)}, \quad (28)$$

gdzie: $T_{4,5} = 0,5\tau \cdot \left[0,5 + A' \pm \sqrt{(0,5 + A')^2 - 1/3} \right]$.

Analogicznie na podstawie uogólnionego schematu strukturalnego i układu równań (11) otrzymano modele *UD* dla innych oddziaływań sterujących. Zależności aproksymujące *TO* układu dynamicznego dla różnych oddziaływań sterujących, pokazanych na rys. 1, różnią się od przytoczonych tylko wartością współczynnika wzmocnienia K_0 *OS*. Zamiast współczynnika $K_{F_{x1}}$ w zależności (21) dla K_0 w tym przypadku wchodzi współczynniki wzmocnienia odpowiednich oddziaływań $K_e, K_{F_{dod.i}}, K_{M_i}, K_{M_{skr.}}$. Wartości tych współczynników mogą być obliczone według zależności przytoczonych w tab. 1.

W szeregu przypadków, z wystarczającą dla praktycznych obliczeń inżynierskich dokładnością, zależności aproksymujące dla *TO* (20) celowo jest budować przy wykorzystaniu pierwszego członu rozkładu funkcji $e^{-s\tau}$ w szereg Pade:

$$e^{-s\tau} = \left(1 - \frac{1}{2}s \cdot \tau\right) / \left(1 + \frac{1}{2}s \cdot \tau\right).$$

Przy tym, na przykład, transmitancja (20) po przekształceniu sprowadza się do postaci typowych członów:

$$G_{F_{x1}}(s) = \frac{g_y(s)}{F_{x1}(s)} = K_0 \cdot \frac{(T_{02} \cdot s + 1)}{(T_{03} \cdot s + 1)}, \quad (29)$$

gdzie: $T_0 = \tau$, $T_{01} = \tau/2$, $T_{02} = T_{01} + A' \cdot T_0 = \tau \cdot (0,5 + A')$,

$$T_{03} = T_0 \cdot B' + T_{01} = \tau \cdot (0,5 + B'). \quad (30)$$

Uogólniony i szczegółowe *MM* układu dynamicznego toczenia wzdłużnego wałków o małej sztywności w stanie sprężysto-odkształcalnych, uwzględniają różnorodne warianty aproksymacji funkcji $e^{-s\tau}$ i wpływ geometrii ostrza skrawającego $K_{\kappa_r} \neq 0$ i $K_{\kappa_r} = 0$ ($\kappa_r = 90^\circ$ – zalecany do obróbki wałków o małej sztywności).

Tab. 2.. Transmitancje operatorowe, współczynniki wzmocnienia oraz stałe czasowe uogólnionego i uproszczonego MM UD toczenia wałów o małej sztywności w stanie sprężystość - odkształcalnym

Nr	$K_{\kappa_r} \neq 0, \kappa_r \neq 90^\circ$		$K_{\kappa_r} = 0, \kappa_r = 90^\circ$	
	Transmitancja operatorowa UD	Współczynnik wzmocnienia	Stale czasowe	Transmitancja operatorowa UD
1	2	3	4	5
	Przy utrzymaniu 2 członów rozkładu funkcji $e^{-s\tau}$ w szereg Pade: $G_{T1}(s) = K_0 \frac{T_3^2 s^2 + T_3 s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{bz}n_z K_z + K_{yy}n_y}$ $A_1 = m_x K_x + m_y K_y K_{\kappa_r}$ $B_1 = [m_x K_x + K_{\kappa_r} (m_y K_y + m_x K_{xy} + K_{xy}n_x K_y m_y) + K_{bz} K_z K_{\kappa_r} (m_z + n_z m_y K_y + K_{yy} m_y K_{\kappa_r} (1 + n_x K_x))] / (1 + K_{xy}n_x + K_{bz} K_z n_z + K_{yy}n_y)$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_1 \pm \sqrt{(0,5 + B_1)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $T_3' = (0,5 + A_1)\tau$	Przy utrzymaniu 2 członów rozkładu funkcji $e^{-s\tau}$ w szereg Pade: $G_{T1}(s) = K_0 \frac{T_3^2 s^2 + T_3 s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$
1	$m_x K_x \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{bz}n_z K_z + K_{yy}n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{\kappa_r}$ $B_2 = \{K_{\kappa_r} (m_y K_y + K_{xy}n_x m_y K_y) + K_{xy}m_x (K_{\kappa_r} - n_x K_x) + K_{bz}n_z K_z \times [K_{\kappa_r} n_z m_y K_y + m_z (K_{\kappa_r} - n_x K_x)] + [K_{\kappa_r} n_z m_y K_y + m_z (K_{\kappa_r} - n_x K_x)]\} / (1 + K_{xy}n_x + K_{bz} K_z n_z + K_{yy}n_y)$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_2 \pm \sqrt{(0,5 + B_2)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $T_3' = (0,5 + A_2)\tau$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{bz}n_z K_z + K_{yy}n_y}$ $A_2' = 0$ $B_2' = n_x K_x (m_z K_z + m_x K_{xy} + m_y K_{yy}) / (1 + K_{xy}n_x + K_{bz}n_z K_z + K_{yy}n_y)$
1	$m_x K_x \ll 1, K_{bz}n_z K_z \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{yy}n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{\kappa_r}$ $B_3 = \{K_{\kappa_r} (m_y K_y + K_{xy}n_x m_y K_y) + K_{xy}m_x (K_{\kappa_r} - n_x K_x) + K_{yy}m_y (K_{\kappa_r} - n_x K_x)\} / (1 + K_{xy}n_x + K_{yy}n_y)$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_3 \pm \sqrt{(0,5 + B_3)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $T_3' = (0,5 + A_2)\tau$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{yy}n_y}$ $A_2' = 0$ $B_3' = n_x K_x (m_x K_{xy} + m_y K_{yy}) / (1 + K_{xy}n_x + K_{bz}n_z K_z + K_{yy}n_y)$
				6
				7
				$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_1' \pm \sqrt{(0,5 + B_1')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $T_3' = (0,5 + A_1')\tau$
				$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_2' \pm \sqrt{(0,5 + B_2')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $T_3' = 0,5\tau$ $\varepsilon = \frac{T_3'}{2T_3} = 0,866$
				$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_3' \pm \sqrt{(0,5 + B_3')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $T_3' = 0,5\tau$ $\varepsilon = 0,866$

Tab. 2.. Transmitancje operatorowe, współczynniki wzmocnienia oraz stałe czasowe uogólnionego i uproszczonego MM UD toczenia wałów o małej sztywności w stanie sprzężenie - odkształcalnym (cd.)

1	2	3	4	5	6	7
1	$K_{xy} \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{yy}n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{\kappa_r}$ $B_4 = [K_{yy}m_y K_{\kappa_r} (n_y K_y + 1) + K_{yy}m_y (K_{\kappa_r} - n_x K_x)] / (1 + K_{yy}n_y)$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_4 \pm \sqrt{(0,5 + B_4)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $T'_3 = (0,5 + A_2)\tau$		$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{yy}n_y}$ $A'_2 = 0$ $B'_4 = n_x K_x K_{yy} m_y / (1 + K_{yy}n_y)$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B'_3 \pm \sqrt{(0,5 + B'_3)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $T'_3 = 0,5\tau$ $\varepsilon = 0,866$
2	$A_1 \ll 0,077$ $G_{T1}(s) = K_0 \frac{T_3^2 s^2 + 2\ell T_3 s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{be}n_z K_z + K_{yy}n_y}$ $A_1 = m_x K_x + m_y K_y K_{\kappa_r}, B_1 = B_1$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_1 \pm \sqrt{(0,5 + B_1)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\varepsilon = \frac{0,5 + A_1}{0,577}$	$G_{T1}(s) = K_0 \frac{T_3^2 s^2 + 2\ell T_3 s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{be}n_z K_z + K_{yy}n_y}$ $A'_1 = m_x K_x$ $B'_1 = \frac{m_x K_x}{1 + K_{xy}n_x + K_{be}n_z K_z + K_{yy}n_y}$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B'_1 \pm \sqrt{(0,5 + B'_1)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\varepsilon = \frac{0,5 + A_1}{0,577}$
2	$m_x K_x \ll 1, A_2 \ll 0,077$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{be}n_z K_z + K_{yy}n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{\kappa_r}, B_2 = B_2$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_2 \pm \sqrt{(0,5 + B_2)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\varepsilon = \frac{0,5 + A_2}{0,577}$	$G_{T1}(s) = K_0 \frac{T_3^2 s^2 + 2\ell T_3 s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{be}n_z K_z + K_{yy}n_y}$ $A'_2 = 0, B'_2 = B'_2$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B'_2 \pm \sqrt{(0,5 + B'_2)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\varepsilon = 0,866$
2	$m_x K_x \ll 1, K_{be}n_z K_z \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{yy}n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{\kappa_r}, B_3 = B_3$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_3 \pm \sqrt{(0,5 + B_3)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\varepsilon = \frac{0,5 + A_2}{0,577}$		$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{yy}n_y}$ $A'_2 = 0, B'_3 = B'_3$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B'_3 \pm \sqrt{(0,5 + B'_3)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\varepsilon = 0,866$
2	$K_{xy} \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{yy}n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{\kappa_r}, B_4 = B_4$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_4 \pm \sqrt{(0,5 + B_4)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\varepsilon = \frac{0,5 + A_2}{0,577}$		$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{yy}n_y}$ $A'_2 = 0, B'_4 = B'_4$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B'_4 \pm \sqrt{(0,5 + B'_4)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\varepsilon = 0,866$

Tab. 2. Transmittancje operatorowe, współczynniki wzmocnienia oraz stałe czasowe uogólnionego i uproszczonego MM UD toczenia wałów o małej sztywności w stanie sprężyste - odkształcalnym (cd.)

1	2	3	4	5	6	7
3	$A_1 \geq 0,078$ $G_{T2}(s) = \frac{(T_{4,5} + 1)(T_{2,5} + 1)}{T_{1,5} + 1(T_{2,5} + 1)}$	$K_0 = \frac{K_{F,u}}{1 + K_{sp}n_x + K_{be}n_z K_z + K_{sp}n_y}$ $A_1 = m_x K_x + m_y K_y K_{\kappa_r}, B_1 = B_1$	$T_{4,5} = 0,5\tau[0,5 + A_1 \pm \sqrt{(0,5 + A_1)^2 - 1/3}]$ $T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_1 \pm \sqrt{(0,5 + B_1)^2 - 1/3}]$	$G_{T2}(s) = \frac{(T_{4,5} + 1)(T_{2,5} + 1)}{T_{1,5} + 1(T_{2,5} + 1)}$	$K_0 = \frac{K_{F,u}}{1 + K_{sp}n_x + K_{be}n_z K_z + K_{sp}n_y}$ $A_1 = m_x K_x, B_1 = B_1'$	$T_{4,5} = 0,5\tau[0,5 + A_1' \pm \sqrt{(0,5 + A_1')^2 - 1/3}]$ $T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_1' \pm \sqrt{(0,5 + B_1')^2 - 1/3}]$
3	$m_x K_x \ll 1, A_2 \geq 0,078$	$K_0 = \frac{K_{F,u}}{1 + K_{sp}n_x + K_{be}n_z K_z + K_{sp}n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{\kappa_r}, B_2 = B_2$	$T_{4,5} = 0,5\tau[0,5 + A_2 \pm \sqrt{(0,5 + A_2)^2 - 1/3}]$ $T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_2 \pm \sqrt{(0,5 + B_2)^2 - 1/3}]$	$G_{T1}(s) = K_0 \frac{T_3^2 s^2 + 2\epsilon T_3 s + 1}{(T_3 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$K_0 = \frac{K_{F,u}}{1 + K_{sp}n_x + K_{be}n_z K_z + K_{sp}n_y}$ $A_2 = 0, B_2 = B_2'$	$T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_2' \pm \sqrt{(0,5 + B_2')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\epsilon = 0,866$
3	$m_x K_x \ll 1, K_{be} n_z K_z \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F,u}}{1 + K_{sp}n_x + K_{sp}n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{\kappa_r}, B_3 = B_3$	$T_{4,5} = 0,5\tau[0,5 + A_2 \pm \sqrt{(0,5 + A_2)^2 - 1/3}]$ $T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_3 \pm \sqrt{(0,5 + B_3)^2 - 1/3}]$		$K_0 = \frac{K_{F,u}}{1 + K_{sp}n_x + K_{sp}n_y}$ $A_2 = 0, B_3 = B_3'$	$T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_3' \pm \sqrt{(0,5 + B_3')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\epsilon = 0,866$
3	$K_{sp} \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F,u}}{1 + K_{sp}n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{\kappa_r}, B_4 = B_4$	$T_{4,5} = 0,5\tau[0,5 + A_2 \pm \sqrt{(0,5 + A_2)^2 - 1/3}]$ $T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_4 \pm \sqrt{(0,5 + B_4)^2 - 1/3}]$		$K_0 = \frac{K_{F,u}}{1 + K_{sp}n_y}$ $A_2 = 0, B_4 = B_4'$	$T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_4' \pm \sqrt{(0,5 + B_4')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\epsilon = 0,866$
4	Przy utrzymaniu 1 człona rozkładu funkcji $e^{-s\tau}$ w szereg Padé: $G_{T3}(s) = K_0 \frac{T_2 s + 1}{T_3 s + 1}$	$K_0 = \frac{K_{F,u}}{1 + K_{sp}n_x + K_{be}n_z K_z + K_{sp}n_y}$ $A_1 = m_x K_x + m_y K_y K_{\kappa_r}, B_1 = B_1$	$T_0 = \tau, T_1 = 0,5\tau$ $T_2 = \tau(0,5 + A_1)$ $T_3 = \tau(0,5 + B_1)$	Przy utrzymaniu 1 człona rozkładu funkcji $e^{-s\tau}$ w szereg Padé: $G_{T3}(s) = K_0 \frac{T_2 s + 1}{T_3 s + 1}$	$K_0 = \frac{K_{F,u}}{1 + K_{sp}n_x + K_{be}n_z K_z + K_{sp}n_y}$ $A_1 = m_x K_x, B_1 = B_1'$	$T_0 = \tau, T_1 = 0,5\tau$ $T_2 = \tau(0,5 + A_1')$ $T_3 = \tau(0,5 + B_1')$

Tab. 2.. Transmitancje operatorowe, współczynniki wzmocnienia oraz stałe czasowe uogólnionego i uproszczonego MM UD toczenia wałów o małej sztywności w stanie sprężyste - odkształcalnym (cd.)

1	2	3	4	5	6	7
4	$m_x K_x \lll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{s1}}}{1 + K_{sp} n_x + K_{bz} n_z K_z + K_{yp} n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{s_r}, B_2 = B_2$	$T_0 = \tau, T_1 = 0,5\tau$ $T_2 = \tau(0,5 + A_2)$ $T_3 = \tau(0,5 + B_2)$		$K_0 = \frac{K_{F_{s1}}}{1 + K_{sp} n_x + K_{bz} n_z K_z + K_{yp} n_y}$ $A'_1 = 0, B'_2 = B'_2$	$T_0 = \tau$ $T_1 = T_2 = 0,5\tau$ $T_3 = \tau(0,5 + B'_2)$
	$m_x K_x \lll 1, K_{bz} n_z K_z \lll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{s1}}}{1 + K_{sp} n_x + K_{yp} n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{s_r}, B_3 = B_3$	$T_0 = \tau, T_1 = 0,5\tau$ $T_2 = \tau(0,5 + A_2)$ $T_3 = \tau(0,5 + B_3)$		$K_0 = \frac{K_{F_{s1}}}{1 + K_{sp} n_x + K_{yp} n_y}$ $A'_2 = 0, B'_3 = B'_3$	$T_0 = \tau$ $T_1 = T_2 = 0,5\tau$ $T_3 = \tau(0,5 + B'_3)$
	$K_{sp} \lll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{s1}}}{1 + K_{yp} n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{s_r}, B_4 = B_4$	$T_0 = \tau, T_1 = 0,5\tau$ $T_2 = \tau(0,5 + A_2)$ $T_3 = \tau(0,5 + B_4)$		$K_0 = \frac{K_{F_{s1}}}{1 + K_{yp} n_y}$ $A'_2 = 0, B'_4 = B'_4$	$T_0 = \tau$ $T_1 = T_2 = 0,5\tau$ $T_3 = \tau(0,5 + B'_4)$

Parametry rozpatrzonych MM również, jak i w przypadku sterowania prędkością posuwu wzdłużnego podlegają dużej zmienności. Stałe czasowe OS zmieniają się przede wszystkim z powodu zmiany czasu opóźnienia τ , a największy wpływ na wartość współczynników wzmocnienia okazuje zmiana punktu przyłożenia siły skrawania po długości części x_0 – ukazany wpływ jest oczywisty z zależności na współczynniki $K_e, K_{F_{dod.i}}, K_{M_i}, K_{M_{skr.}}$, przytoczonych w tab. 1.

W tab. 2 przedstawiono transmitancje operatorowe, współczynniki wzmocnienia oraz stałe czasowe uogólnionego i szczegółowych MM układu dynamicznego toczenia wzdłużnego wałów o małej sztywności w stanie sprężysto-odkształcalnym.

PODSUMOWANIE

Jak wynika z przeprowadzonych badań, struktury dynamiczne MM układów technologicznych wałów o małej sztywności przy sterowaniu ich stanem sprężysto-odkształcalnym zawierają, obok członów inercyjnych charakterystycznych dla MM sterowania według posuwu, również człony przeciążeniowe. Występowanie członów przeciążeniowych w transmitancjach MM zmniejsza inercyjność OS według kanałów sterowania dodatkowymi oddziaływaniami siłowymi. Na przykład przy bliskich wartościach stałych czasowych licznika i mianownika w zależnościach (28) i (29), co ma miejsce w wielu przypadkach, właściwości modelu OS zbliżają się do właściwości członu bezinercyjnego ze współczynnikiem przekazywania K_0 .

Należy podkreślić, że rozpatrzony opis matematyczny OS został wykonany przy nieuwzględnieniu „małych” stałych czasowych, charakteryzujących właściwości dynamiczne procesu skrawania i ekwiwalentnego układu sprężystego. Takie podejście jest uzasadnione, ponieważ w obwód UAS lub AC razem z obiektem wchodzi także automatyczne urządzenie sterujące i inne człony z „dużymi” stałymi czasowymi, których właściwości dynamiczne są bardzo istotne przy rozwiązaniu zadania analizy stabilności i syntezy członów korygujących.

Porównanie MM obiektu dla różnorodnych oddziaływań regulacyjnych umożliwia stwierdzenie, że przy zastosowaniu dodatkowych oddziaływań siłowych obiekt ma znacznie mniejszą inercyjność w porównaniu z przypadkiem sterowania według kanału posuwu. Dzięki temu w UAS i AC stanu sprężysto-odkształcalnego części zasadniczo można uzyskać wyższe wskaźniki jakości sterowania w dynamice i efektywnie przeciwdziałać zakłóceniom wywołanym zmianą naddatku i twardości obrabianych półfabrykatów, zmieniając ich sztywność po długości obróbki.

LITERATURA

- [1] *Адаптивное управление станками* / Под ред. Б. С. Балакшина. – М.: Машиностроение, 1973. – с. 688.
- [2] Solomencev J. M., Mitrofanov V. G., Taranenko V. A.: *Adaptivne riadenie obrabacich strojov*. Bratislava: ALFA, 1983. – s. 231.
- [3] Бессекерский В. А., Попов Е. П.: *Теория систем автоматического регулирования*. – М.: Наука, 1975. – с. 768.
- [4] Abakumow A., Taranenko W., Zubrzycki J.: *Moduły programowe dla badania charakterystyk układu dynamicznego procesu skrawaniach*. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej NR 230 MECHANIKA, z. 67 - Modułowe Technologie i Konstrukcje w Budowie Maszyn, Rzeszów 2006. – s. 99 – 109.

- [5] Тараненко В. А., Абакумов А. М.: *Динамические модели для оценки точности технологических систем.* – М.: ВНИИТЭМР, Вып.1, 1989. – 54 с.
- [6] Abakumov A., Taranenko V., Zubrzycki J.: *Modeling of characteristics of dynamic system of turning process for axialsymmetric shafts.* V-th INTERNATIONAL CONGRESS “MECHANICAL ENGINEERING TECHNOLOGIES’ 06” (MT’06), September 20 -23. 2006, Varna, Bulgaria. PROCEEDINGS. Section III. S.76 - 78
- [7] Кудинов В. А.: *Динамика станков.* – М.; Машиностроение, 1967. – 267 с.
- [8] Abakumov A., Taranenko V., Zubrzycki J. Wolos D.: *Controlling the dynamical system of machine tools by elastic-deformable shafts machining.* ПРОГРЕССИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И СИСТЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ: Международный сборник научных трудов. – Донецк: ДонНТУ, 2006. Выпуск 32. – С. 272 -278
- [9] Taranenko W., Świć A.: *Technologia kształtowania części maszyn o malej sztywności.* Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, Lublin 2005, 282 s.
- [10] Taranenko W., Świć A.: *Urządzenia sterujące dokładnością obróbki części maszyn o malej sztywności.* Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, Lublin 2006, 186 s.
- [11] Абакумов А. М., Тараненко В. А.: *Динамические свойства упругой системы при управлении упругодеформированным состоянием деталей малой жесткости // Динамика станочных систем и гибких автоматизированных производств: Тезисы докл. 3-ей Всесоюзной науч.-техн. конф..* – Тольятти, 1988. - С. 334-335
- [12] Абакумов А. М., Тараненко В. А.: *Математическая модель процесса точения деталей малой жесткости // Идентификация и автоматизация технологических процессов в машиностроении: Сб.науч.тр.* – Куйбышев, 1988. – С. 67-69
- [13] Абакумов А. М., Воронин П. А., Денкевиц В. А. и др.: *Математическая модель процесса точения при управлении продольной подачей и скоростью шпинделя // НИИмаш.* – Деп. В ВИНТИ, 1978, № 2.
- [14] Абакумов А. М., Воронин П. А., Денкевиц В. А. и др.: *Идентификация процесса продольного точения / Алгоритмизация и автоматизация технологических процессов и промышленных установок: Межвуз. сб. научн.тр.* – Куйбышев, 1974. –Вып. 5. – С. 28 - 34
- [15] Zorev N.N.: *Raschet proekcji sily rezania.* - Moskwa: Mashinostroenie, 1958. - 58 s.

Prof. dr hab. inż. W. Taranenko – profesor zwyczajny Politechniki Lubelskiej, kierownik Zakładu Elastycznych Systemów Wytwarzania w Instytucie Technologicznych Systemów Informacyjnych, ul. Nadbystrzycka 36, 20-618 Lublin, w.taranenko@pollub.pl

Mgr inż. J. Szabelski - asystent, Instytut Technologicznych Systemów Informacyjnych Politechniki Lubelskiej, ul. Nadbystrzycka 36, 20-618 Lublin, j.szabelski@pollub.pl

Doc. dr inż. G. Taranenko – Sewastopolski Narodowy Uniwersytet Techniczny, prodziekan Wydziału Technologii, Automatykacji Budowy Maszyn, Przyrządów i Transportu, Streleckaja Bałka, Studgorodok, 99053 Sewastopol, Ukraina, ernoteh@mail.ru