Prof. dr hab. inż. Mikołaj Busłowicz
Katedra Automatyki i Elektroniki
Wydział Elektryczny Politechniki Białostockiej

STABILNOŚĆ LINIOWYCH CIĄGŁYCH UKŁADÓW UŁAMKOWYCH RZĘDU WSPÓŁMIERNEGO

W pracy podano nowe warunki stabilności liniowych ciągłych układów ułamkowych współmiernego rzędu. Są one uogólnieniem kryterium stabilności Michajłowa oraz zmodyfikowanego kryterium stabilności Michajłowa, znanych z teorii stabilności układów naturalnego rzędu. Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym.

STABILITY OF LINEAR CONTINUOUS-TIME FRACTIONAL SYSTEMS OF COMMENSURATE ORDER

New frequency domain methods for stability analysis of linear continuous-time fractional systems of commensurate order are given. The methods proposed are generalization of Mikhailov stability criterion and modified Mikhailov criterion known from the theory of natural number order systems. The considerations are illustrated by numerical example.

1. WSTĘP

W ostatnich kilkunastu latach problem analizy i syntezy układów dynamicznych, opisanych równaniami różniczkowymi lub różnicowymi ułamkowego rzędu, był tematem wielu publikacji, np. [1, 5-7, 11-20]. Przegląd aktualnego stanu wiedzy z zakresu układów ułamkowych można znaleźć np. w [14, 15, 11, 18, 19, 20]. Problemowi stabilności i odpornej stabilności ciągłych układów ułamkowych są poświęcone prace [1, 4-7, 12, 13, 16, 20]. Nową klasę liniowych dyskretnych dodatnich układów ułamkowych wprowadzono w pracy [8]. Podano w niej warunek konieczny i wystarczający dodatniości oraz warunek dostateczny osiągalności.

Celem niniejszej pracy jest podanie nowych częstotliwościowych warunków koniecznych i wystarczających stabilności liniowego ciągłego układu ułamkowego rzędu współmiernego. Proponowane warunki są uogólnieniem na rozpatrywaną klasę układów kryterium Michajłowa oraz zmodyfikowanego kryterium Michajłowa [2, 9, 21], znanych z teorii stabilności liniowych układów rzędu naturalnego. Uogólnienie proponowanych warunków stabilności na klasę układów ułamkowych rzędu niewspółmiernego jest podane w pracy [4].

2. WPROWADZENIE I SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozpatrzmy liniowy stacjonarny ciągły układ dynamiczny rzędu ułamkowego o jednym wejściu i jednym wyjściu (zwany krótko układem ułamkowym) opisany ułamkowym równaniem różniczkowym o postaci [20]

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^{\alpha_i}}{dt^{\alpha_i}} y(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^{\beta_k}}{dt^{\beta_k}} u(t), \qquad (1)$$

gdzie $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \cdots > \alpha_1 > \alpha_0 \geq 0$, $\beta_m > \beta_{m-1} > \cdots > \beta_1 > \beta_0 \geq 0$ są to liczby rzeczywiste, a_i $(i = 0,1,2,...,n)$ oraz b_k $(k = 0,1,2,\ldots,m)$ są to rzeczywiste współczynniki,

$$\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha - p)}\int_0^t \frac{x^{(p)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-p}} \tag{2}$$

jest definicją Caputo pochodnej rzędu ułamkowego α, $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ jest funkcją gamma Eulera zaś p jest dodatnią liczbą całkowitą spełniającą nierówność $p - 1 \leq \alpha \leq p$.

Stosując przekształcenie Laplace'a do obu stron równania (1) przy zerowych warunkach początkowych otrzymamy transmitancję operatorową

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1}s^{\beta_{m-1}} + \ldots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1}s^{\alpha_{n-1}} + \ldots + a_0 s^{\alpha_0}}. \tag{3}$$

Równanie różniczkowe (1) oraz transmitancja (3) opisują w przypadku ogólnym układy ułamkowe rzędu niewspółmiernego. Funkcja charakterystyczna takich układów ma postać

$$w(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1}s^{\alpha_{n-1}} + \ldots + a_0 s^{\alpha_0}. \tag{4}$$

W dalszych rozważaniach funkcję (4) będziemy nazywać wielomianem charakterystycznym ułamkowego stopnia lub krótko wielomianem ułamkowym.

W przypadku układów ułamkowych rzędu współmiernego są spełnione warunki

$$\alpha_i = i\alpha \quad (i = 0,1,...,n) \text{ oraz } \beta_k = k\alpha \quad (k = 0,1,...,m), \tag{5}$$

przy czym [20]

- jeżeli α jest liczbą wymierną, tzn. $\alpha = 1/q$ (q jest liczbą całkowitą dodatnią, tj. $q \geq 1$), to (1) nazywamy układem rzędu współmiernego wymiernego (lub krótko: wymiernego)
- jeżeli liczba rzeczywista α nie jest liczbą wymierną, to układ (1) nazywamy układem rzędu współmiernego niewymiernego (lub krótko: niewymiernego).

W dalszych rozważaniach będziemy głównie rozpatrywać układy (1) rzędu współmiernego wymiernego, o transmitancji operatorowej

$$G(s) = \frac{b_m s^{m\alpha} + b_{m-1}s^{(m-1)\alpha} + \ldots + b_1 s^{\alpha} + b_0}{a_n s^{n\alpha} + a_{n-1}s^{(n-1)\alpha} + \ldots + a_1 s^{\alpha} + a_0}. \tag{6}$$

Stosując w (6) podstawienie $\lambda = s^{\alpha}$ otrzymamy stowarzyszoną transmitancję operatorową rzędu naturalnego

$$G(\lambda) = \frac{b_m \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + b_1\lambda + b_0}{a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0}. \tag{7}$$

Funkcja charakterystyczna liniowych układów ułamkowych rzędu współmiernego ma postać

$$w(s) = a_n s^{n\alpha} + a_{n-1}s^{(n-1)\alpha} + \ldots + a_1 s^{\alpha} + a_0. \tag{8}$$

Z ułamkowym wielomianem charakterystycznym (8) jest stowarzyszony wielomian stopnia naturalnego

$$\tilde{w}(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0, \tag{9}$$

będący mianownikiem transmitancji (7).

W przypadku ogólnym wielomian charakterystyczny (4) układu (1) jest wieloznaczną funkcją zmiennej zespolonej s, której dziedziną jest powierzchnia Riemanna [20]. Powierzchnia ta ma nieskończoną liczbę liści, przy czym z punktu widzenia stabilności istotny jest liść główny, dla którego jest spełniony warunek $-\pi < \arg s < \pi$.

Powierzchnia Riemanna ma skończoną liczbę liści tylko w przypadku wielomianu (8) stopnia współmiernego wymiernego, czyli przy $\alpha = 1/q$.

Przy analizie stabilności układu ułamkowego (1) stopnia współmiernego (i też niewspółmiernego [13, 20]) istotne są zera jego ułamkowego wielomianu charakterystycznego położone na liściu głównym, dla których jest spełniony warunek $-\pi < \arg s < \pi$. Zera tego wielomianu położone na pozostałych liściach płaszczyzny Riemanna mają wpływ tylko na te składowe rozwiązania równania (1), które monotonicznie zanikają do zera przy $t \to \infty$.

W pracy [13] udowodniono poniższe podstawowe twierdzenie o stabilności układu ułamkowego rzędu współmiernego (patrz też np. [20]).

Twierdzenie 1. Układ ułamkowy (1) rzędu współmiernego jest stabilny (w sensie ograniczone wejście – ograniczone wyjście) wtedy i tylko wtedy, gdy jego wielomian charakterystyczny (8) ułamkowego stopnia jest stabilny, tzn. wszystkie jego zera leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie zespolonej płaszczyzny Riemanna, tj.

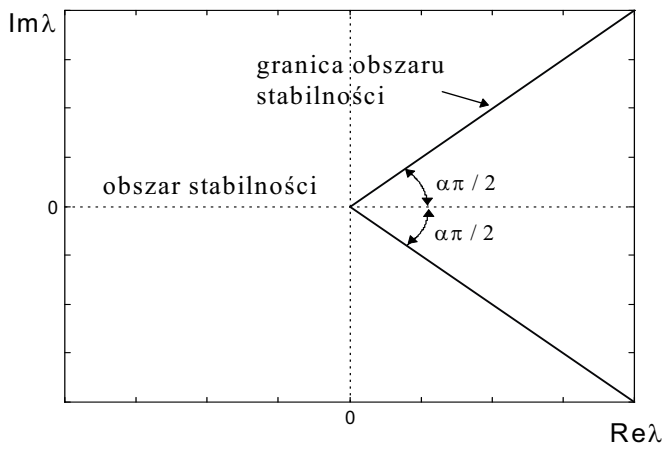
$$w(s) \neq 0 \text{ dla } \operatorname{Re} s \geq 0, \tag{10}$$

lub równoważnie, wszystkie zera λ_i $(i = 1,2,...,n)$ stowarzyszonego z nim wielomianu (9) spełniają warunek

$$|\arg \lambda_i| > \alpha \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

W dalszych rozważaniach stabilność w sensie ograniczone wejście – ograniczone wyjście będziemy nazywać krótko stabilnością.

Jeżeli $0 < \alpha \leq 1$, to warunek (11) jest spełniony dla zer leżących w obszarze stabilności pokazanym na rys. 1. Zauważmy, że obszar ten redukuje się do otwartej lewej półpłaszczyzny przy $\alpha = 1$.



Rys. 1. Obszar stabilności wielomianu (8) na płaszczyźnie zespolonej $\lambda = s^{\alpha}$ przy $0 < \alpha \leq 1$

Z twierdzenia 1 wynika, że badanie stabilności układu ułamkowego (1) rzędu współmiernego przy $0 < \alpha \leq 1$ można sprowadzić do problemu badania położenia zer wielomianu (9)

w obszarze stabilności pokazanym na rys. 1. Obszarem tym jest część płaszczyzny zmiennej zespolonej, która nie zawiera stożka o kącie rozwarcia $\alpha\pi$ położonego w prawej półpłaszczyźnie.

Z powyższych rozważań wynika prosty warunek wystarczający stabilności.

Lemat 1. Układ ułamkowy (1) rzędu współmiernego przy $0 < \alpha \leq 1$ jest stabilny, jeżeli wielomian (9) jest asymptotycznie stabilny, tj. wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste.

Zauważmy, że rozpatrywany układ ułamkowy może być stabilny w przypadku, gdy wielomian (9) naturalnego stopnia nie jest stabilny, tzn. ma zera o dodatniej części rzeczywistej.

Badanie stabilności układu ułamkowego (1) rzędu współmiernego metodą bezpośredniego sprawdzania spełnienia warunku (11) dla wszystkich zer wielomianu (9) stopnia naturalnego może być niedogodne ze względu na wysoki stopień tego wielomianu w pewnych przypadkach. Ilustruje to poniższy przykład.

Jeżeli wielomian charakterystyczny ułamkowego stopnia ma postać [6]

$$w(s) = s^{127/105} + 0.4s^{77/105} + 0.3s^{71/105} + 0.1s^{56/105} + 1, \tag{12}$$

to stosując podstawienie $\lambda = s^{\alpha} = s^{1/105}$ otrzymamy stowarzyszony wielomian

$$\tilde{w}(\lambda) = \lambda^{127} + 0.4\lambda^{77} + 0.3\lambda^{71} + 0.1\lambda^{56} + 1 \tag{13}$$

stopnia naturalnego, który ma stopień równy 127, a więc bardzo wysoki. Zauważmy, że wielomian ułamkowy (12) ma tylko 5 wyrazów.

Aby uniknąć wyżej wymienionej niedogodności w pracy [6] zaproponowano wyznaczanie stowarzyszonego wielomianu stopnia naturalnego nie w postaci wielomianu jednej zmiennej, ale w postaci wielomianu kilku zmiennych niezależnych. Stabilność takiego wielomianu jest warunkiem dostatecznym stabilności wielomianu charakterystycznego układu ułamkowego. Do badania stabilności wielomianu kilku zmiennych w [6] zaproponowano metodę wykorzystującą Liniowe Nierówności Macierzowe (ang. Linear Matrix Inequlities - LMI).

Celem niniejszej pracy jest podanie nowych warunków stabilności układu ułamkowego (1) rzędu współmiernego. Należą one do grupy warunków częstotliwościowych. Przy ich formułowaniu zostanie wykorzystane kryterium stabilności Michajłowa oraz zmodyfikowane kryterium Michajłowa, znane z teorii stabilności wielomianów stopnia naturalnego, np. [2, 9, 21].

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Z twierdzenia 1 wynika, że są sobie równoważne dwa poniższe warunki (będące warunkami koniecznymi i wystarczającymi stabilności układu (1)):

1. dla wielomianu (8) stopnia ułamkowego jest spełniony warunek (10),
2. wszystkie zera wielomianu (9) stopnia naturalnego spełniają warunek (11), tj. leżą w obszarze stabilności pokazanym na rys. 1.

W teorii stabilności wielomianów naturalnego stopnia rozpatruje się ich stabilność asymptotyczną (wszystkie zera leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie) oraz D-stabilność, gdy wszystkie zera leżą w zadanym otwartym obszarze D na płaszczyźnie zmiennej zespolonej [2].

Z powyższego i twierdzenia 1 wynika natychmiast następujący lemat.

Lemat 2. Wielomian stopnia ułamkowego (8) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy stowarzyszony z nim wielomian stopnia naturalnego (9) jest D-stabilny, gdzie D jest obszarem stabilności określonym nierównością (11). Brzegiem tego obszaru jest linia łamana o opisie parametrycznym

$$(j\omega)^{\alpha} = |\omega|^{\alpha} e^{j\alpha\pi/2}, \ \omega \in (-\infty, \infty). \tag{14}$$

Zauważmy, że przy $\alpha = 1$ wielomian ułamkowy (8) redukuje się do wielomianu (9) stopnia naturalnego. Wtedy opis (14) staje się opisem parametrycznym brzegu obszaru stabilności asymptotycznej tego wielomianu, tj. osi urojonej płaszczyzny zmiennej zespolonej.

Przy badaniu D-stabilności wielomianu (9) stopnia naturalnego z wykorzystaniem metod częstotliwościowych możemy ograniczyć się tylko do części tego obszaru leżącej w półpłaszczyźnie $\mathrm{Im}\lambda \geq 0$, której brzeg ma opis parametryczny (14) przy $\omega \in [0,\infty)$. Wynika to z faktu, że obszar D jest symetryczny względem osi rzeczywistej.

Uwzględniając pracę [2] otrzymamy poniższe kryteria stabilności.

Twierdzenie 2. Wielomian ułamkowy (8) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta \arg_{0 \leq \omega < \infty} w(j\omega) = n\pi / 2, \tag{15}$$

gdzie $w(j\omega)$ otrzymuje się z wielomianu (8) stosując w nim podstawienie $s = j\omega$, czyli wykres funkcji $w(j\omega)$ rozpoczyna się na dodatniej półosi rzeczywistej dla $\omega = 0$ i przy ω zmieniającym się od 0 do ∞ przebiega w kierunku matematycznie dodatnim, nie trafiając w początek płaszczyzny zmiennej zespolonej, przez n ćwiartek tej płaszczyzny.

Dowód. Ponieważ $\tilde{w}((j\omega)^{\alpha}) = w(j\omega)$, warunek (15) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym D-stabilności wielomianu (9) [2]. Dowód wynika zatem z lematu 2. ■

Wykres funkcji $w(j\omega)$, gdzie $w(j\omega) = w(s)$ dla $s = j\omega$ ($w(s)$ ma postać (8)) można nazwać (poprzez analogię do teorii stabilności wielomianów stopnia naturalnego) uogólnionym hodografem Michajłowa.

Twierdzenie 2 jest trudne w stosowaniu z tego powodu, że wartości bezwzględne funkcji $w(j\omega)$ rosną bardzo szybko wraz ze wzrostem wartości parametru $\omega \in [0,\infty)$, tzn. wykres tej funkcji bardzo szybko oddala się od początku układu współrzędnych. W takiej sytuacji określenie liczby okrążeń punktu (0,0) przez ten wykres jest bardzo trudne.

Aby uniknąć opisanej powyżej niedogodności zamiast wielomianu ułamkowego (8) będziemy rozpatrywać funkcję

$$\psi(s) = \frac{w(s)}{w_0(s)}, \tag{16}$$

gdzie $w(s)$ ma postać (8) zaś $w_0(s)$ jest wielomianem odniesienia ułamkowego stopnia równego stopniowi wielomianu (8). Będziemy zakładać, że wielomian odniesienia $w_0(s)$ jest stabilny, tj. spełnia warunek

$$w_0(s) \neq 0 \ \text{dla} \ \mathrm{Re}\, s \geq 0. \tag{17}$$

Wielomian odniesienia można wybrać np. w postaci

$$w_0(s) = d(s+c)^{\alpha n}, \tag{18}$$

gdzie stałe c i d są dodatnie.

Zauważmy, że dla $c > 0$ wielomian (18) jest stabilny, zgodnie z twierdzeniem 1.

Można w (18) np. przyjąć $d = a_n$ (a_n jest współczynnikiem wielomianu (8)) oraz $c = 1$.

Twierdzenie 3. Wielomian ułamkowy (8) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\omega \in (-\infty,\infty)}{\Delta \arg} \psi(j\omega) = 0, \tag{19}$$

gdzie $\psi(j\omega) = \psi(s)$ dla $s = j\omega$.

Dowód. Wielomian odniesienia $w_0(s)$ jest stabilny z założenia. Zatem zgodnie z zasadą argumentu (np. [10]) mamy

$$\underset{\omega \in (-\infty,\infty)}{\Delta \arg} w_0(j\omega) = \arg w_0(j\infty) - \arg w_0(-j\infty) = 0. \tag{20}$$

Ze wzoru (16) wynika, że dla $s = j\omega$ zachodzi zależność

$$\Delta \arg \psi(j\omega) = \Delta \arg w(j\omega) - \Delta \arg w_0(j\omega). \tag{21}$$

Wielomian ułamkowy (8) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy $\underset{\omega \in (-\infty,\infty)}{\Delta \arg} w(j\omega) = 0$, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy warunek (19) jest spełniony. ■

Warunek (19) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy przy ω zmieniającym się od $-\infty$ do ∞ wykres funkcji $\psi(j\omega)$ (który można nazwać uogólnionym zmodyfikowanym hodografem Michajłowa) nie okrąża początku płaszczyzny zmiennej zespolonej ani też nie przechodzi przez niego.

Jeżeli wielomian odniesienia ma postać (18) przy $d = a_n$, to ze wzorów (8), (16) i (18) mamy

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \psi(j\omega) = \lim_{\omega \to \pm\infty} \frac{w(j\omega)}{w_0(j\omega)} = 1, \qquad \psi(j0) = \frac{w(j0)}{w_0(j0)} = \frac{a_0}{a_n c^{\alpha n}}. \tag{22}$$

Z powyższego i twierdzenia 3 wynika, że wykres funkcji $\psi(j\omega)$ przy $\omega \in (-\infty, \infty)$ okrąża początek płaszczyzny zmiennej zespolonej lub przechodzi przez niego, jeżeli $a_0 / a_n \le 0$.

Słuszny jest więc poniższy lemat.

Lemat 3. Wielomian stopnia ułamkowego (8) nie jest stabilny jeżeli $a_0 / a_n \le 0$.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy warunek (19) nie jest spełniony, czyli wielomian ułamkowy (8) nie jest stabilny. W takim przypadku słuszne jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4. Wielomian ułamkowy (8) ma $k > 0$ zer w domkniętej prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\omega \in (-\infty,\infty)}{\Delta \arg} \psi(j\omega) = k2\pi, \tag{23}$$

czyli przyrost argumentu $\psi(j\omega)$ przy ω zmieniającym się od $-\infty$ do ∞ wynosi $k2\pi$, lub równoważnie, wykres funkcji $\psi(j\omega)$, nie trafiając w początek płaszczyzny zmiennej zespolonej, okrąża go k razy w kierunku matematycznie dodatnim przy $\omega \in (-\infty, \infty)$.

Dowód. Jeżeli układ ułamkowy (8) ma $k > 0$ zer w domkniętej prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny Riemanna, to zgodnie z zasadą argumentu

$$\underset{\omega\in(-\infty,\infty)}{\Delta \arg} \; w(j\omega) = k2\pi. \tag{24}$$

Wtedy ze wzorów (20) i (21) wynika, że warunek (23) jest spełniony. Jeżeli zaś są spełnione warunki (24) i (20), to z (21) wynika (23).

4. PRZYKŁAD

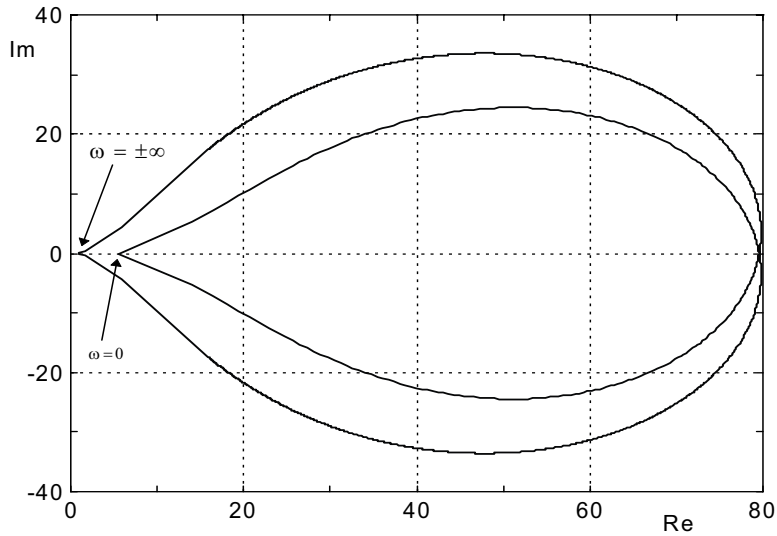
Należy zbadać stabilność układu ułamkowego o wielomianie charakterystycznym [6]

$$\begin{aligned} w(s) = {} & 134.7955988s^{11/15} + 17.49138877s^{14/15} + 7.5619s^{7/5} + 18.60416827s^{6/5} \\ & + s^{8/5} + 13.68686363s^{3/5} + 276.0731421s^{1/3} + 269.6615050s^{1/5} \\ & + 218.5809037s^{2/5} + 338.6269398s^{8/15} + 7.3225s^{19/15} + 55.92198403s^{16/15} \\ & + 139.1374509s^{13/15} + 14.79208246s + 221.9590294. \end{aligned} \tag{25}$$

Przyjmując $\alpha = 1/15$ i $\lambda = s^{\alpha} = s^{1/15}$ powyższy wielomian napiszemy postaci

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\lambda) = {} & \lambda^{24} + 7.5619\lambda^{21} + 7.3225\lambda^{19} + 18.60416827\lambda^{18} + 55.92198403\lambda^{16} \\ & + 14.79208246\lambda^{15} + 17.49138877\lambda^{14} + 139.1374509\lambda^{13} + 134.7955988\lambda^{11} \\ & + 13.68686363\lambda^{9} + 338.6269398\lambda^{8} + 218.5809037\lambda^{6} + 276.0731421\lambda^{5} \\ & + 269.6615050\lambda^{3} + 221.9590294. \end{aligned} \tag{26}$$

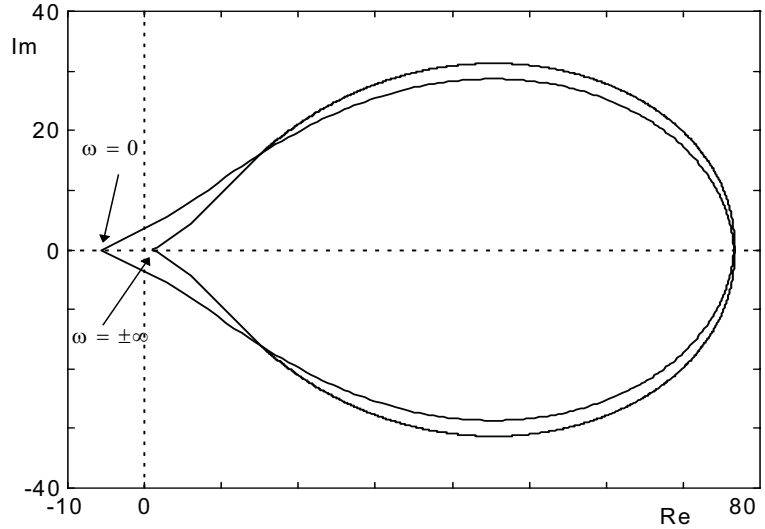
Z twierdzenia 1 wynika, że wielomian ułamkowy (25) jest stabilny (wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste) wtedy i tylko wtedy, gdy stowarzyszony z nim wielomian stopnia naturalnego (26) nie ma zer w stożku o kącie rozwarcia $\alpha\pi = \pi/15 = 0.2094$ rad.



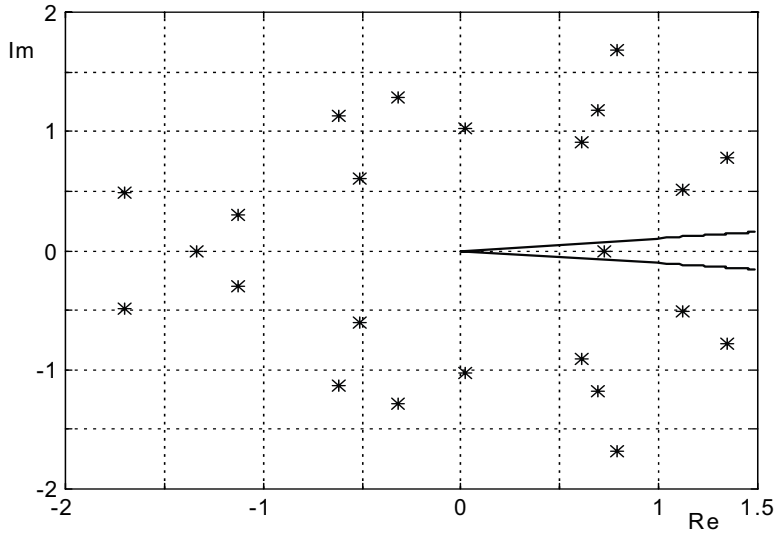
Rys. 2. Wykres funkcji (16) przy $s = j\omega$, $\omega \in (-\infty, \infty)$, $w(s)$ o postaci (25)

Rozpatrzmy teraz wielomian ułamkowy (25) i stowarzyszony z nim wielomian stopnia naturalnego (26) w przypadku, gdy wyraz wolny jest ze znakiem ujemnym, tj. występuje w tych wielomianach wyraz -221.9590294 zamiast +221.9590294. W takim przypadku $a_0 / a_n = a_0 < 0$ i zgodnie z lematem 3, układ ułamkowy nie jest stabilny.

Wykres funkcji (16) przy $s = j\omega$ i $w_0(s) = (s+10)^{8/5}$ jest pokazany na rys. 3, przy czym $\lim_{\omega \to \pm\infty} \psi(j\omega) = 1, \ \psi(j0) = -5.5754.$ Natomiast rozkład zer wielomianu stopnia naturalnego (26) przy ujemnym wyrazie wolnym jest pokazany na rys. 4. Na tym rysunku jest też pokazany brzeg obszaru stabilności.



Rys. 3. Wykres funkcji (16) przy $s = j\omega, \ \omega \in (-\infty, \infty), \ w(s)$ o postaci (25) o ujemnym wyrazie wolnym



Rys. 4. Rozkład zer (*) wielomianu (26) przy ujemnym wyrazie wolnym

Z rys. 4 wynika, że w rozpatrywanym przypadku wielomian naturalnego stopnia ma jedno zero poza obszarem stabilności, co oznacza że wielomian ułamkowego stopnia ma też jedno zero o dodatniej części rzeczywistej. Natomiast z rys. 3 wynika, że wykres funkcji $\psi(j\omega)$ jeden raz obejmuje w kierunku dodatnim początek płaszczyzny zmiennej zespolonej. Potwierdza to fakt, że rozpatrywany wielomian ułamkowego stopnia ma jedno zero o dodatniej części rzeczywistej, zgodnie z twierdzeniem 4.

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy podano nowe częstotliwościowe warunki konieczne i wystarczające stabilności liniowych ciągłych układów ułamkowych rzędu współmiernego. Są one jest uogólnieniem kryterium Michajłowa oraz zmodyfikowanego kryterium Michajłowa, znanych z teorii stabilności liniowych układów rzędu naturalnego.

Rozszerzenie tych warunków na klasę ciągłych układów ułamkowych rzędu niewspółmiernego jest podane w pracy [4] zaś w pracy [3] jest podane rozszerzenie na klasę dyskretnych układów ułamkowych rzędu współmiernego.

* * *

Praca naukowa finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego w latach 2007-2010 jako projekt badawczy nr N N514 1939 33.

LITERATURA

1. Ahn H-S., Chen Y-Q., Podlubny I.: Robust stability checking of a class linear interval fractional order linear systems using Lyapunov inequality, Proc. of the 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, 2006, Porto, Portugal.
2. Busłowicz M.: Stabilność układów liniowych stacjonarnych o niepewnych parametrach. Dział Wyd. i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Białystok 1997.
3. Busłowicz M.: Stability of linear fractional discrete-time systems of commensurate order (w przygotowaniu).
4. Busłowicz M.: Frequency domain method for stability analysis of linear continuous-time fractional systems, praca zgłoszona na Krajową Konferencję Automatyki, Szczyrk 2008.
5. Chen Y.-Q., Ahn H.-S., Podlubny I.: Robust stability check of fractional order linear time invariant systems with interval uncertainties, Signal Processing, 2006, vol. 86, pp. 2611-2618.
6. Gałkowski K., Bachelier O., Kummert A.: Fractional polynomial and nD systems a continuous case, Proc. of IEEE Conference on Decision & Control, 2006, San Diego, USA.
7. Hwang C., Cheng Y-Q.: A numerical method for stability testing of fractional delay systems, Automatica, 2006, vol. 42, pp. 825-831.
8. Kaczorek T.: Reachability and controllability to zero of positive fractional discrete-time systems, Machine Intelligence and Robotic Control, 2007, vol. 6, No. 4.
9. Kaczorek T.: Teoria układów regulacji automatycznej, WNT Warszawa 1974.
10. Leja F.: Funkcje zespolone. PWN Warszawa 1976.

11. Ma C.: Fractional order control and its applications in motion control, PhD Dissertation, Department of Electrical Engineering, University of Tokyo, 2004.
12. Matignon D.: Stability results on fractional differential equation with applications to control processing, Proc. of IMACS, 1996, Lille, France.
13. Matignon D.: Stability properties for generalized fractional differential systems, Proc. of ESAIM, 1998, pp.145-158.
14. Ortigueira M. D.: Introduction to fractional linear systems. Part 1: Continuous-time case, IEE Proc - Vis. Image Singnal Process, 2000, vol. 147, No.1, pp. 62-70.
15. Ortigueira M. D.: Introduction to fractional linear systems. Part 2: Discrete-time systems, IEE Proc - Vis. Image Singnal Process, 2000, vol. 147, No.1, pp. 71-78.
16. Petras I., Chen Y.-Q., Vinagre B. M.: A robust stability test procedure for a class of uncertain LTI fractional order systems, Proc. Int. Carpatian Control Conf. ICCC'2002, 2002, Malenovice, Czech Republic, pp. 247-252.
17. Sierociuk D., Dzieliński A.: Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation. Int. J. Appl. Math. Comp. Sci., 2006, vol. 16, No. 1, pp. 129-140.
18. Sierociuk D.: Estimation and control of discrete dynamical systems of fractional order in state space, PhD Dissertation, Faculty of Electrical Engineering, Warsaw University of Technology, 2007 (in Polish).
19. Valerio D.: Fractional Robust Systems Control, PhD Dissertation, Techn. Univ. of Lisbona, 2005.
20. Vinagre B. M., Monje C. A., Calderon A .J.: Fractional order systems and fractional order control actions. Lecture 3 of IEEE CDC'02 TW#2: Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics, 2002, Las Vegas.
21. Wright W.C., Kerlin T.W.: An efficient computer oriented method for stability analysis of large multivariable systems, Trans. ASME Journal Basic Eng., 1970, vol. 92, No. 2, pp. 279-286.