

mgr inż. Andrzej Ruszewski  
 Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny  
 mgr inż. Aneta Sidorowicz  
 Studia Doktoranckie, Wydział Elektryczny PB

## STABILIZACJA UKŁADÓW INERCYJNYCH UŁAMKOWEGO RZĘDU Z OPÓŹNIENIEM ZA POMOCĄ UŁAMKOWEGO REGULATORA PI

*W pracy rozpatrzono problem stabilizacji za pomocą ułamkowego regulatora PI układów inercyjnych ułamkowego rzędu z opóźnieniem. Podano proste komputerowe metody wyznaczania obszarów stabilności na płaszczyźnie parametrów rozpatrywanego regulatora. Proponowane metody bazują na klasycznej metodzie podziału D przestrzeni współczynników quasi-wielomianów charakterystycznych.*

### STABILIZATION OF INERTIAL PLANTS OF FRACTIONAL ORDER WITH DELAY USING FRACTIONAL PI CONTROLLERS

*The paper presents the problem of stabilizing of inertial plants with time delay using a fractional-order PI controller. Using the classical D-partition method, a simple and efficient computational method for determining stability regions in the controller parameters space are given.*

#### 1. WSTĘP

W ostatnich latach obserwuje się wzrost zainteresowania układami dynamicznymi opisanymi ułamkowymi równaniami różniczko-całkowymi, np. [8, 16]. Teoria układów ułamkowych znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach inżynierii, np. [6, 9].

Regulator PID ułamkowego rzędu  $PI^\lambda D^\mu$  został zaproponowany w pracy [10]. W regulatorze tym rząd całkowania  $\lambda$  oraz różniczkowania  $\mu$  są w ogólnym przypadku dowolnymi nieujemnymi liczbami rzeczywistymi. Problem doboru nastaw regulatorów ułamkowego rzędu dla obiektów regulacji bez opóźnienia transportowego rozpatrywany był między innymi w pracach [4, 7, 10, 17]. Wykazano tam, że zastosowanie regulatora ułamkowego  $PI^\lambda D^\mu$  o pięciu stopniach swobody poprawia wskaźniki jakości regulacji. Badania przeprowadzono dla modeli obiektów regulacji całkowitego i ułamkowego rzędu. W pracy [5] rozpatrzono problem stabilności układów regulacji złożonych z ułamkowego regulatora i obiektów ułamkowego rzędu z opóźnieniem.

Literatura na temat syntezy parametrycznej regulatorów PID całkowitego rzędu jest dość obszerna, np. [1, 14, 15]. W pracach tych przedstawiono metody wyznaczania zbiorów wartości parametrów regulatora, dla których rozpatrywane układy regulacji są asymptotycznie stabilne. Stabilność asymptotyczna oraz D-stabilność układów regulacji z regulatorami PI oraz PID analizowana była w pracach [2, 11-13]. Wykorzystując metodę podziału D podano w nich komputerowe metody wyznaczania obszarów asymptotycznej stabilności i D-stabilności w przestrzeni parametrów regulatora i obiektów z opóźnieniem.

W niniejszej pracy rozpatrzony zostanie problem badania stabilności układów regulacji automatycznej złożonych z ułamkowego regulatora PI i obiektu inercyjnego ułamkowego rzędu z opóźnieniem. Zostaną podane komputerowe metody wyznaczania obszarów stabilności w przestrzeni parametrów regulatora  $PI^\lambda$ . Proponowane metody oparte są na klasycznej metodzie podziału D oraz podejściu zaprezentowanym w pracach [2, 11].

## 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Dany jest obiekt dynamiczny opisany transmitancją operatorową

$$G(s) = \frac{Ke^{-sh}}{1+Ts^\alpha}, \quad h \geq 0, \quad K > 0, \quad (1)$$

gdzie  $\alpha$  jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Będziemy przyjmować, że  $\alpha \in (0, 1]$ . Przy  $\alpha = 1$  transmitancja (1) opisuje człon inercyjny pierwszego rzędu z opóźnieniem.

W przypadku układów ułamkowego rzędu rozpatrujemy stabilność w sensie ograniczone wejście-ograniczone wyjście, którą dalej będziemy krótko nazywać stabilnością, np. [3].

Jeżeli  $T > 0$ , to obiekt (1) jest stabilny, natomiast dla obiektów niestabilnych będziemy przyjmować  $T < 0$ .

Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej złożony z obiektu (1) i szeregowego ułamkowego regulatora PI o transmitancji

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda}, \quad (2)$$

gdzie  $\lambda$  jest ułamkowym rzędem części całkującej regulatora. W przypadku ogólnym  $\lambda$  jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Przyjmując  $\lambda = 1$  otrzymamy transmitancję operatorową klasycznego regulatora PI.

Rozpatrywany układ regulacji automatycznej jest stabilny, gdy jego quasi-wielomian charakterystyczny ułamkowego stopnia

$$w(s) = K(k_p s^\lambda + k_i) \exp(-sh) + (1 + Ts^\alpha) s^\lambda \quad (3)$$

jest stabilny, tzn. wszystkie jego zera mają ujemne części rzeczywiste [5].

W przypadku ogólnym quasi-wielomian ma nieskończenie wiele zer i nie istnieją ogólne metody analityczne służące do badania jego stabilności. Analityczne kryteria są spotykane tylko w pewnych przypadkach szczególnych. Badanie stabilności quasi-wielomianów zazwyczaj jest dokonywane metodami graficznymi, np. kryterium Michajłowa. Ponadto quasi-wielomian (3) jest quasi-wielomianem ułamkowego stopnia, co jeszcze bardziej komplikuje problem badanie jego stabilności. Przy ustalonej transmitancji obiektu (1) stabilność quasi-wielomianu (3) zależy od wartości parametrów regulatora  $k_p$ ,  $k_i$  oraz  $\lambda$ .

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie metody wyznaczania obszarów stabilności w przestrzeni parametrów regulatora  $(k_p, k_i)$ , przy ustalonym  $\lambda$ . Każdemu punktowi z wyznaczonego obszaru odpowiada stabilny układ regulacji.

## 3. GŁÓWNY REZULTAT

Korzystając z faktu, że zera quasi-wielomianu są ciągłymi funkcjami wartości parametrów regulatora, płaszczyznę  $(k_p, k_i)$  można podzielić na obszary  $D(k)$  o skończonej liczbie zer quasi-wielomianu (3) o dodatniej części rzeczywistej. Dowolny punkt w  $D(k)$  odpowiada takim wartościom  $k_p$ ,  $k_i$ , dla których quasi-wielomian (3) ma dokładnie  $k$  zer o dodatniej części rzeczywistej. Obszar  $D(0)$  jest obszarem stabilności. Granice stabilności, zwane granicami podziału D, są liniami krzywymi na płaszczyźnie  $(k_p, k_i)$ . Dowolnemu punktowi na granicy podziału D odpowiada quasi-wielomian (3) który ma przynajmniej jedno zero na osi urojonej.

Może to być zero rzeczywiste lub para zer urojonych sprzężonych, otrzymamy wtedy odpowiednio granice zer rzeczywistych lub zer zespolonych. Dowolnemu punktowi na granicy zer rzeczywistych odpowiada quasi-wielomian (3), który ma zero  $s = 0$ . Łatwo zauważyć, że na płaszczyźnie  $(k_p, k_i)$  granicą zer rzeczywistych quasi-wielomianu (3) jest linia prosta  $k_i = 0$ . Granicę zer zespolonych wyznacza się rozwiązując względem  $k_p$  i  $k_i$  równanie

$$K[k_p(j\omega)^\lambda + k_i] \exp(-j\omega h) + [1 + T(j\omega)^\alpha](j\omega)^\lambda = 0, \quad (4)$$

które otrzymuje się przyrównując do zera quasi-wielomian (3) przy  $s = j\omega$ . Wyrażenie  $j^\lambda$ , gdzie  $\lambda$  jest ułamkiem, można wyrazić jako

$$j^\lambda = \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right). \quad (5)$$

Równanie zespolone (4) jest spełnione, gdy odpowiednio jego części rzeczywiste i urojone są równe 0, tj.

$$T\omega^{\lambda+\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\alpha)+\omega h\right) + \omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda + \omega h\right) + Kk_p\omega^\lambda \cos\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) + Kk_i = 0, \quad (6a)$$

$$T\omega^{\lambda+\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\alpha)+\omega h\right) + \omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda + \omega h\right) + Kk_p\omega^\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) = 0. \quad (6b)$$

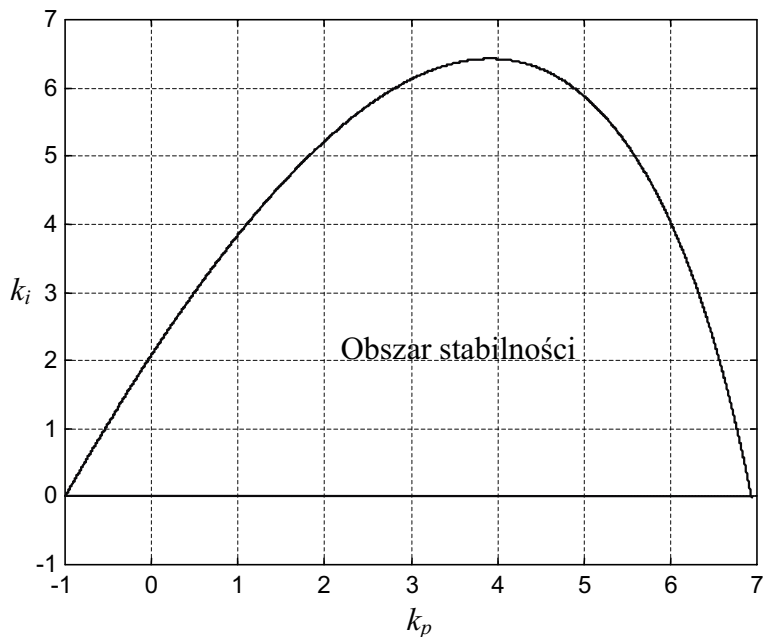
Rozwiązując równania (6) względem  $k_p$  i  $k_i$  odpowiednio otrzymamy

$$k_p = \frac{-1}{k \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)} \left[ T\omega^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+\alpha)+\omega h\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda + \omega h\right) \right], \quad (7a)$$

$$k_i = \frac{1}{k \sin\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)} \left[ T\omega^{\lambda+\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha + \omega h\right) + \omega^\lambda \sin(\omega h) \right]. \quad (7b)$$

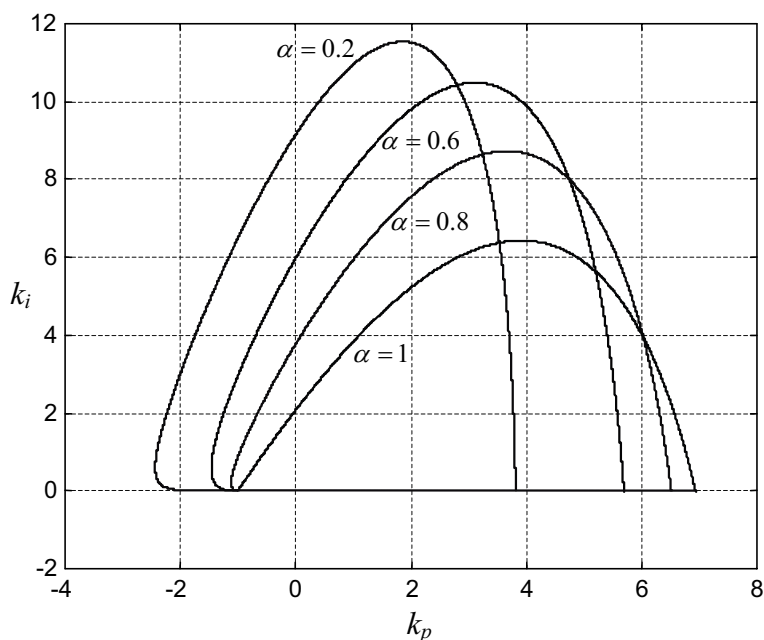
Linia krzywa o opisie parametrycznym (7), wyznaczona w funkcji parametru  $\omega$ , określa na płaszczyźnie  $(k_p, k_i)$  granicę zer zespolonych quasi-wielomianu (3). Linia prosta  $k_i = 0$  oraz linia krzywa (7) dzielą płaszczyznę  $(k_p, k_i)$  na obszary  $D(k)$ . Jeżeli obszar  $D(0)$  istnieje (nie jest pusty), to jest on obszarem stabilności rozpatrywanego układu regulacji automatycznej. W celu sprawdzenia, czy dany obszar jest obszarem stabilności należy zbadać stabilność quasi-wielomianu (3) dla jednego punktu z tego obszaru, stosując np. kryterium Michajłowa [3]. Przyjmując  $\alpha = 1$  oraz  $\lambda = 1$  w (7) otrzymamy opis parametryczny granicy zer zespolonych dla przypadku obiektu i regulatora całkowitego rzędu. Stabilność rozpatrywanego układu regulacji przeanalizujemy dla czterech przypadków: 1) obiekt i regulator całkowitego rzędu, 2) obiekt ułamkowego rzędu, regulator całkowitego rzędu, 3) obiekt całkowitego rzędu, regulator ułamkowego rzędu, 4) obiekt i regulator ułamkowego rzędu. Przyjmijmy wartości parametrów obiektu (1) jako  $K = 1$ ,  $h = 0.5$ ,  $T = 2$ .

Obszar stabilności rozpatrywanego układu w przypadku 1 jest pokazany na rys. 1. Dowolny punkt leżący wewnątrz tego obszaru określa parametry regulatora PI, zapewniające asymptotyczną stabilność układu regulacji automatycznej.



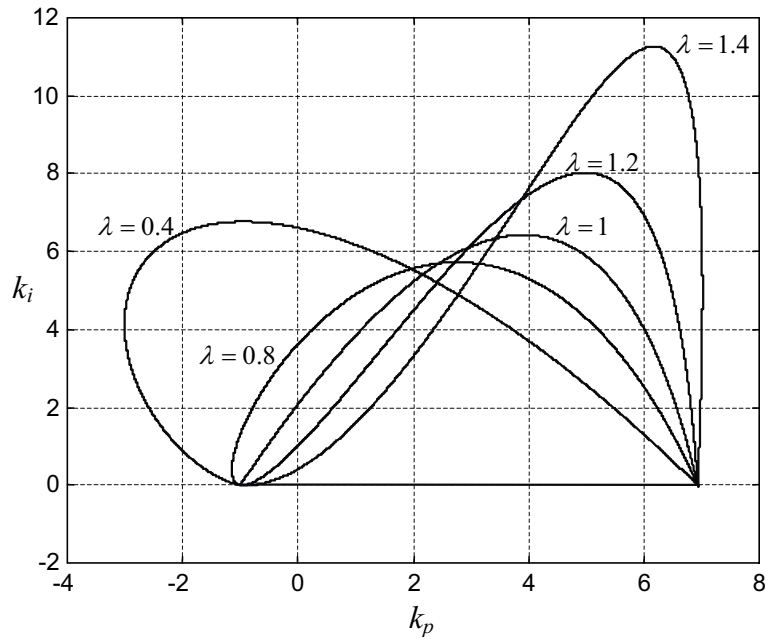
Rys. 1. Obszar stabilności quasi-wielomianu (3) w przypadku 1

Obszary stabilności quasi-wielomianu (3) w przypadku obiektu ułamkowego rzędu i regulatora całkowitego rzędu pokazane są na rys. 2. Obszary stabilności zostały wyznaczone dla kilku wartości  $\alpha$ , przy  $\lambda = 1$ . Z rys. 2 wynika, że zmniejszanie wartości  $\alpha$  powoduje zwiększenie zakresu  $k_i$  i zmniejszenie zakresu  $k_p$ .

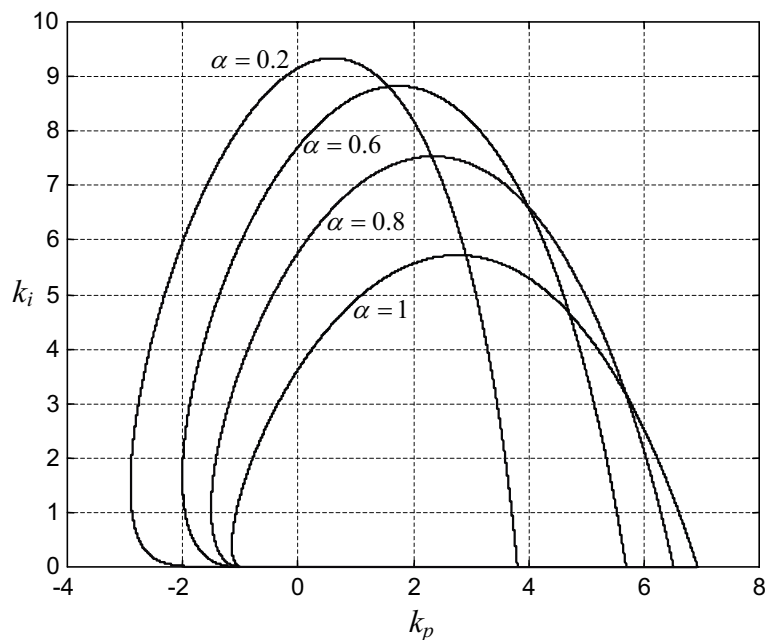


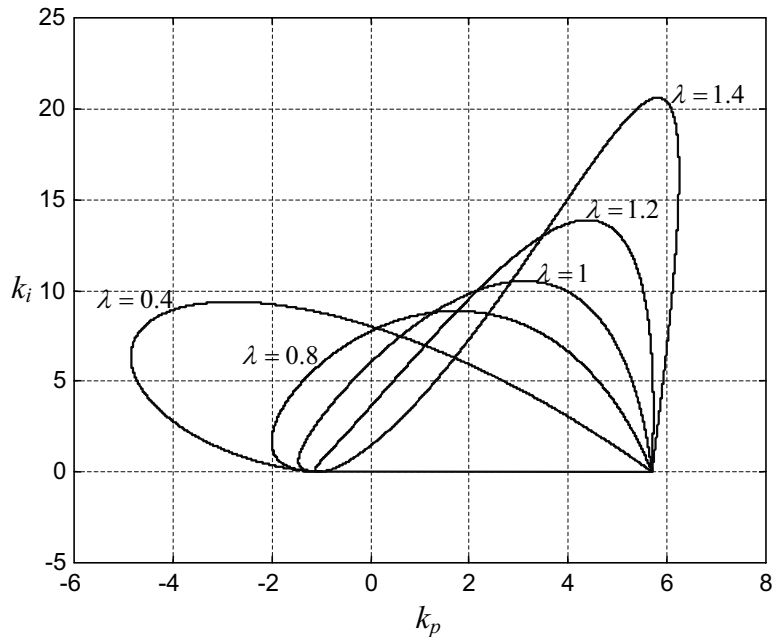
Rys. 2. Obszary stabilności quasi-wielomianu (3) przy  $\lambda = 1$ .

Na rys. 3 przedstawione są obszary stabilności quasi-wielomianu (3) wyznaczone dla przypadku 3 (obiekt całkowitego rzędu, regulator ułamkowego rzędu).

Rys. 3. Obszary stabilności quasi-wielomianu (3) przy  $\alpha = 1$ .

Obszary stabilności quasi-wielomianu (3) w przypadku obiektu i regulatora ułamkowego rzędu pokazane są na rys. 4 i rys. 5. Obszary stabilności zostały wyznaczone dla kilku wartości  $\alpha$  przy  $\lambda = 0.8$  (rys. 4) oraz dla kilku wartości  $\lambda$  przy  $\alpha = 0.6$  (rys. 5).

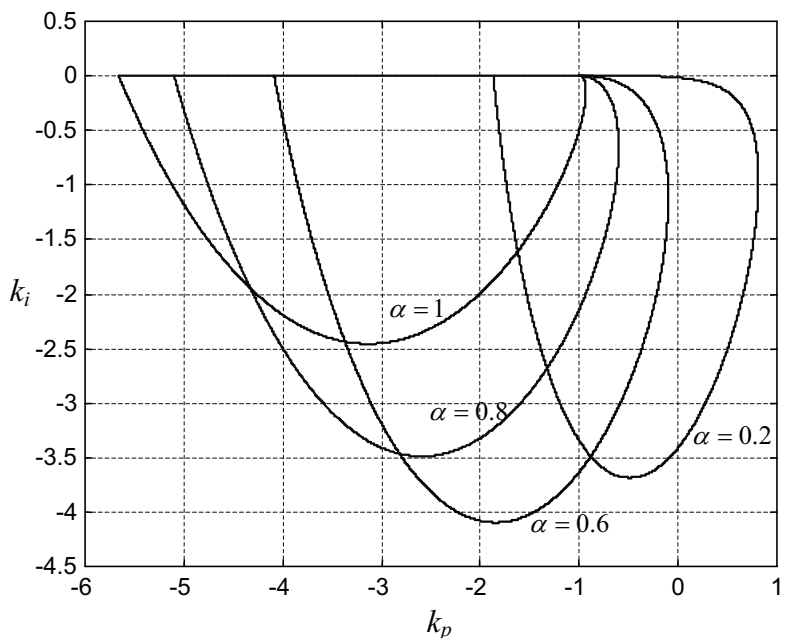
Rys. 4. Obszary stabilności quasi-wielomianu (3),  $\lambda = 0.8$ .



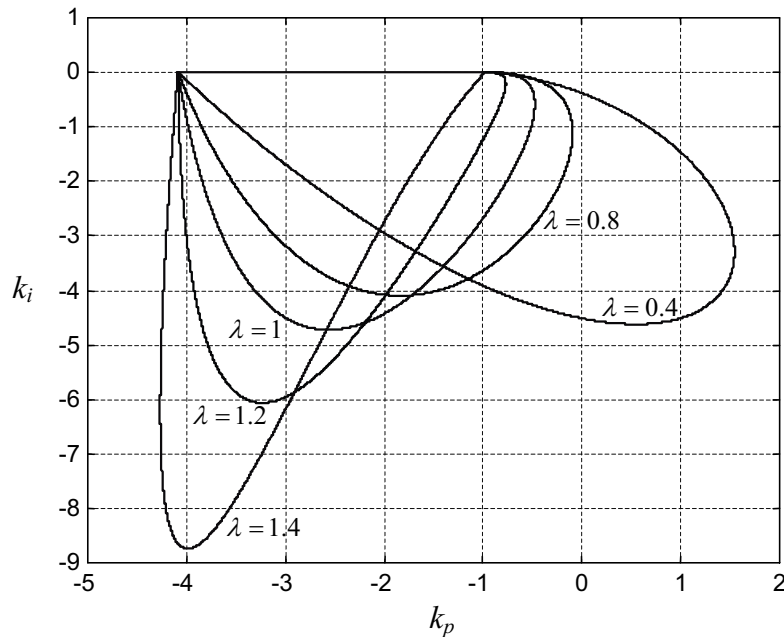
Rys. 5. Obszary stabilności quasi-wielomianu (3) przy  $\alpha = 0.6$

Obszary stabilności przedstawione na rys. 5 są podobne do pokazanych na rys. 3, różnią się skalą. Z rysunków tych wynika, że przy ułamkowym rzędzie  $\alpha$  obiektu obszary stabilności są większe.

Dla obiektu niestabilnego przyjmijmy  $T = -2$ . Na rys. 6 i rys. 7 przedstawione są obszary stabilności quasi-wielomianu (3) wyznaczone dla przypadku 4 (obiekt i regulator ułamkowego rzędu). Z rysunków wynika, że kształt obszarów stabilności jest taki sam jak dla obiektów stabilnych  $T > 0$  (rys. 4, 5), różnią się one tylko położeniem na płaszczyźnie  $(k_p, k_i)$ .



Rys. 6. Obszary stabilności quasi-wielomianu (3),  $T = -2$ ,  $\lambda = 0.8$



Rys. 7. Obszary stabilności quasi-wielomianu (3),  $T = -2$ ,  $\alpha = 0.6$

#### 4. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem badania stabilności układów regulacji automatycznej złożonych z ułamkowego regulatora PI i obiektu inercyjnego ułamkowego rzędu z opóźnieniem. Wykorzystując metodę podziału D podano komputerową metodę wyznaczania obszarów stabilności w przestrzeni parametrów ułamkowego regulatora PI. Dowolny punkt z wyznaczonego obszaru odpowiada takim wartościom parametrów regulatora, dla których układ regulacji jest stabilny, tj. jego bieguny leżą w otwartej lewej półpłaszczyźnie. Rozpatrzono cztery przypadki: 1) obiekt i regulator całkowitego rzędu, 2) obiekt ułamkowego rzędu, regulator całkowitego rzędu, 3) obiekt całkowitego rzędu, regulator ułamkowego rzędu, 4) obiekt i regulator ułamkowego rzędu. Zastosowanie regulatora  $PI^\lambda$  pozwala na zwiększenie obszarów stabilności poprzez odpowiedni dobór ułamkowego rzędu  $\lambda$  części całkującej regulatora. Zaprezentowane podejście można wykorzystać do wyznaczania obszarów stabilności rozpatrywanego układu regulacji z ułamkowym regulatorem PID.

*Pracę wykonano w ramach projektu badawczego promotorskiego N514 019 32/3065 oraz projektu badawczego N N514 1939 33, finansowanych przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.*

#### 5. LITERATURA

1. Ackermann J., Kaesbauer D., Baki H.: *Stable polyhedra in parameter space*, Automatica, 2003, Vol. 39, pp.937–943.
2. Busłowicz M., Ruszewski A.: *Stabilizacja za pomocą regulatorów PI liniowych układów pierwszego rzędu z opóźnieniem*, Mat. XIV Krajowej Konferencji Automatyki, Tom 1, s. 89-94, Zielona Góra, 2002.

3. Busłowicz M.: *Stabilność liniowych ciągłych układów ułamkowych rzędu współmiernego*, praca zgłoszona na konferencję Automation'08, Warszawa 2008.
4. Chen Y.Q., Dou H., Vinagre B. M., Monje C.A.: *A Robust Tuning Method for Fractional Order PI Controllers*, The Second IFAC Symposium on Fractional Derivatives and Applications, Porto, Portugal 2006.
5. Hamamci S. E.: *An Algorithm for Stabilization of Fractional-Order Time Delay Systems Using Fractional-Order PID Controllers*, IEEE Trans. on Automatic Control, 2007, Vol. 52, pp. 1964-1969.
6. Hilfer, R.: *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.
7. Monje C.A., Vinagre B.M., Chen Y.Q., Feliu V., Lanusse P., Sabatier J.: *Proposals for Fractional  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  Tuning*, The First IFAC Symposium on Fractional Differentiation and its Applications, Bordeaux, France 2004.
8. Ortiguera M.D.: *Introduction to fractional linear systems*, IEE Proc.-Vis. Image Signal Process., Vol. 147, No. 1, February 2000.
9. Podlubny, I.: *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, California, 1999.
10. Podlubny I.: *Fractional-order systems and  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  -controllers*, IEEE Trans. on Automatic Control, 1999, Vol. 44, pp.208-214.
11. Ruszewski A.: *D-stabilizacja układów regulacji automatycznej z opóźnieniem*, Materiały konferencyjne Automation 2005, s. 314-323, Warszawa, 2005.
12. Ruszewski A.: *Obszary D-stabilności układów regulacji z obiektem pierwszego rzędu z opóźnieniem*, Mat. XV Krajowej Konferencji Automatyki, Tom 1, s. 183-188, Warszawa, 2005.
13. Ruszewski A.: *Odporna stabilność układów regulacji z obiektami całkującymi z opóźnieniem i regulatorem PD*, PAR, nr 2 (2007), CD-ROM - XI Konferencja Naukowo-Techniczna Automation, Warszawa, 2007.
14. Silva G. J., Datta A., Bhattacharyya S. P.: *PID Controllers for Time-Delay Systems*, Birkhauser, Boston, 2005.
15. Soylemez M.T., Munro N., Baki H.: *Fast calculation of stabilizing PID controllers*, Automatica, 2003, Vol. 39, pp. 121-126.
16. Valerio D.: *Fractional robust system control*, PhD Dissertation, Tech. Univ. of Lisbona, 2005.
17. Zhao C., Xue D., Chen Y.Q.: *A Fractional Order PID Tuning Algorithm for A Class of Fractional Order Plants*, in Proc. of the IEEE International Conference on Mechatronics & Automation, pp. 216-221, Niagara Falls, Canada 2005.