mgr inż. Rafał Kociszewski
Politechnika Białostocka

STEROWALNOŚĆ ZŁOŻONYCH LINIOWYCH DODATNICH UKŁADÓW DYSKRETNYCH Z OPÓŹNIENIAMI

W pracy rozpatrzono problem sterowalności dodatniego układu dyskretnego z wieloma opóźnieniami zmiennych stanu będącego szeregowym połączeniem dwóch dodatnich układów dyskretnych. Dla tego układu podano warunki konieczne i wystarczające sterowalności oraz zaproponowano metodę wyznaczania nieujemnego sterowania, które przeprowadza układ z dowolnego nieujemnego stanu początkowego do zadanego nieujemnego stanu końcowego. Rozważania zilustrowano przykładem liczbowym.

CONTROLLABILITY OF COMPOSITE LINEAR POSITIVE DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH DELAYS

The problem of controllability of composite (connected in series) linear positive discrete-time system with delays in state is considered. Necessary and sufficient conditions for controllability of composite systems are established. A method for computing the control sequence which transfers the system from nonzero initial state to the desired nonnegative final state is given. Considerations are illustrated by numerical example.

1. WSTĘP

Układ dynamiczny nazywa się sterowalnym względem stanu lub sterowalnym względem wyjścia, jeżeli istnieje takie sterowanie (ze zbioru sterowań dopuszczalnych), które przeprowadza ten układ w skończonym czasie ze stanu określonego przez warunki początkowe do zadanego stanu końcowego lub do zadanego końcowego wyjścia. W przypadku standardowego, sterowalnego układu dynamicznego cała przestrzeń stanów tworzy zbiór stanów sterowalnych (osiągalnych). W układach dodatnich zbiór tych stanów jest ograniczony do dodatniej (pierwszej) ćwiartki przestrzeni $\Re^n$, tj. $\Re_+^n$, gdzie *n* jest wymiarem tej przestrzeni. Ten fakt powoduje, że wiele rezultatów znanych z teorii układów standardowych (niedodatnich), np. z zakresu kryteriów sterowalności (osiągalności), obserwowalności czy stabilizacji nie może być bezpośrednio zastosowanych do układów dodatnich.

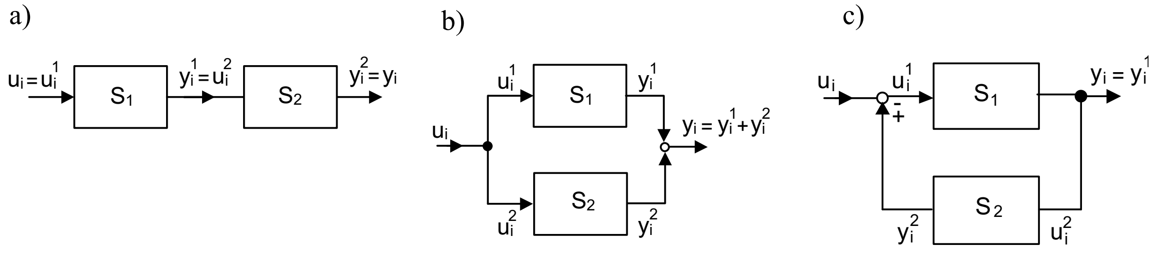
Problem sterowalności (chwilowej) złożonych układów standardowych dyskretnych i ciągłych był rozpatrywany np. w monografiach [5, 10] a także w pracach [3, 4, 9]. Sterowalność dyskretnego układu dodatniego z opóźnieniami była tematem prac [12, 13].

W niniejszej pracy, na przykładzie dodatnich układów połączonych szeregowo, zostaną podane warunki konieczne i wystarczające sterowalności układu zastępczego. Zostanie wykazane, że sterowalność układów składowych jest warunkiem wystarczającym do sterowalności układu złożonego i do istnienia nieujemnego sterowania, za pomocą którego można osiągnąć zadany nieujemny stan końcowy.

2. SFORMUŁOWANIE POBLEMU

Przyjmijmy następujące oznaczenia: $\Re^{n\times m}$ - zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$ o elementach rzeczywistych ($\Re^{n} = \Re^{n\times 1}$), $\Re_{+}^{n\times m}$- zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$ o elementach rzeczywistych nieujemnych ($\Re_{+}^{n} = \Re_{+}^{n\times 1}$), Z_{+} - zbiór liczb całkowitych dodatnich.

Weźmy pod uwagę dwa układy dodatnie dyskretne z wieloma opóźnieniami zmiennych stanu, połączone jak na poniższym rysunku [6]



Rys 1. Połączenie dwóch układów dodatnich S_1 i S_2, a) szeregowe, b) równoległe, c) ze sprzężeniem zwrotnym

Załóżmy, że liczba opóźnień zmiennych stanu w układach S_1 i S_2 jest taka sama i równa h. Każdy z układów (S_1, S_2) jest opisany równaniem stanu i równaniem wyjścia w postaci [7]

$$\begin{aligned} x_{i+1}^{k} &= A_{k0}x_{i}^{k} + \sum_{j=0}^{h} A_{kj}x_{i-j}^{k} + B_{k}u_{i}^{k}, \;\; i\in Z_{+}, \; k=1,2 \\ y_{i}^{k} &= C_{k}x_{i}^{k} + D_{k}u_{i}^{k}, \end{aligned} \tag{1}$$

z warunkami początkowymi

$$x_{-i}^{k} \in \Re_{+}^{n}, \quad i=0,1,...,h, \;\; k=1,2\,. \tag{2}$$

W równaniu stanu (1) h jest liczbą naturalną, $x_{i}^{k}\in\Re_{+}^{n}$, $u_{i}^{k}\in\Re_{+}^{m}$, $y_{i}^{k}\in\Re_{+}^{p}$ są odpowiednio wektorami stanu, wejścia i wyjścia oraz $A_{k0}, A_{kj}\in\Re_{+}^{n\times n}$, $j=1,...,h$, $B_{k}\in\Re_{+}^{n\times m}$, $C_{k}\in\Re_{+}^{p\times n}$, $D_{k}\in\Re_{+}^{p\times m}$.

Równanie stanu i równanie wyjścia układu zastępczego S_z powstałego w wyniku połączenia układów z rys. 1, można napisać w postaci

$$S_{z}: \begin{aligned} x_{i+1} &= A_{0}x_{i} + \sum_{j=0}^{h} A_{1}x_{i-j} + Bu_{i} \\ y_{i} &= Cx_{i} + Du_{i} \end{aligned}. \tag{3}$$

gdzie $x_{i} = [(x_{i}^{1})^{T} \;\; (x_{i}^{2})^{T}]^{T} \in \Re_{+}^{2n}$ jest wektorem stanu układu zastępczego oraz $A_{j}\in\Re_{+}^{2n\times 2n}$, $j=0,1,...,h$, $B\in\Re_{+}^{2n\times m}$, $C\in\Re_{+}^{p\times 2n}$, $D\in\Re_{+}^{p\times m}$. Dla odpowiednich połączeń otrzymujemy [3]

- *połączenie szeregowe*

$$\begin{bmatrix} x_{i+1}^1 \\ x_{i+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{10} & 0 \\ B_2C_1 & A_{20} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{h}\begin{bmatrix} A_{1j} & 0 \\ 0 & A_{2j} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{i-j}^1 \\ x_{i-j}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix}u_i \tag{4}$$

$$y_i = y_i^2 = [D_2C_1 \quad C_2]\begin{bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \end{bmatrix} + [D_2D_1]u_i \tag{5}$$

przy czym

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_{10} & 0 \\ B_2C_1 & A_{20} \end{bmatrix} \in \Re_+^{2n\times 2n},\ A_j = \begin{bmatrix} A_{1j} & 0 \\ 0 & A_{2j} \end{bmatrix} \in \Re_+^{2n\times 2n},\ j = 1,\dots,h, \tag{6a}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix} \in \Re_+^{2n\times m},\ C = [D_2C_1 \quad C_2] \in \Re_+^{p\times 2n},\ D = [D_2D_1] \in \Re_+^{p\times m}, \tag{6b}$$

- *połączenie równoległe*

$$\begin{bmatrix} x_{i+1}^1 \\ x_{i+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{10} & 0 \\ 0 & A_{20} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{h}\begin{bmatrix} A_{1j} & 0 \\ 0 & A_{2j} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{i-j}^1 \\ x_{i-j}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}u_i \tag{7}$$

$$y_i = y_i^1 + y_i^2 = [C_1 \quad C_2]\begin{bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \end{bmatrix} + [D_1 + D_2]u_i \tag{8}$$

przy czym

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_{10} & 0 \\ 0 & A_{20} \end{bmatrix} \in \Re_+^{2n\times 2n},\ A_j = \begin{bmatrix} A_{1j} & 0 \\ 0 & A_{2j} \end{bmatrix} \in \Re_+^{2n\times 2n},\ j = 1,\dots,h, \tag{9a}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \in \Re_+^{2n\times m},\ C = [C_1 \quad C_2] \in \Re_+^{p\times 2n},\ D = [D_1 + D_2] \in \Re_+^{p\times m}, \tag{9b}$$

- *połączenie ze sprzężeniem zwrotnym*

$$\begin{bmatrix} x_{i+1}^1 \\ x_{i+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{10} & 0 \\ B_2C_1 & A_{20} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{h}\begin{bmatrix} A_{1j} & 0 \\ 0 & A_{2j} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{i-j}^1 \\ x_{i-j}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}u_i \tag{10}$$

$$y_i = y_i^1 = [C_1 \quad 0]\begin{bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

przy czym

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_{10} & 0 \\ B_2C_1 & A_{20} \end{bmatrix} \in \Re_+^{2n\times 2n},\ A_j = \begin{bmatrix} A_{1j} & 0 \\ 0 & A_{2j} \end{bmatrix} \in \Re_+^{2n\times 2n},\ j = 1,\dots,h, \tag{12a}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^{2n\times m},\ C = [C_1 \quad C_2] \in \Re_+^{p\times 2n},\ D = 0. \tag{12b}$$

W równaniach (10), (11) układu zastępczego w połączeniu ze sprzężeniem zwrotnym przyjęto, że $D_1 = 0, D_2 = 0,\ B_1C_2 = 0$ (warunek dodatniości) [6, 7] .

Definicja 1. Dowolny stan $x_i \in \Re_+^{2n}$ nazywamy stanem (chwilowym) układu dodatniego (3) w dyskretnej chwili i.

Definicja 2. Układ dodatni (3) nazywamy sterowalnym

a) w N krokach, jeżeli dla dowolnych nieujemnych warunków początkowych $x_{-i} \in \Re_+^{2n}$, $i = 0,1,...,h$ i dowolnego nieujemnego stanu końcowego $x_f \in \Re_+^n$, istnieje ciąg sterowań $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,...,N-1$, który przeprowadza ten układu z warunków początkowych do stanu x_f,

b) jeżeli dla dowolnych nieujemnych warunków początkowych $x_{-i} \in \Re_+^{2n}$, $i = 0,1,...,h$ i zadanego stanu końcowego $x_f \in \Re_+^n$ istnieje liczba naturalna $N \in Z_+$ i ciąg sterowań $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,...,N-1$ taki, że układ ten jest sterowalny w N krokach.

Definicja 3. Układ dodatni (3) nazywamy sterowalnym do zera

a) w N krokach, jeżeli dla dowolnych nieujemnych warunków początkowych $x_{-i} \in \Re_+^{2n}$, $i = 0,1,..,h$ i stanu końcowego $x_f = 0$ istnieje ciąg sterowań $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,...,N-1$, który przeprowadza ten układ ze stanu początkowego do zera ($x_f = 0$),

b) jeżeli dla dowolnych niezerowych warunków początkowych $x_{-i} \in \Re_+^{2n}$, $i = 0,1,...,h$ i stanu końcowego $x_f = 0$ istnieje liczba naturalna $N \in Z_+$ i ciąg sterowań $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,...,N-1$ taki, że układ ten jest sterowalny do zera w N krokach.

Celem niniejszej pracy jest podanie warunków sterowalności (chwilowej) zastępczego układu dodatniego (3) powstałego z szeregowego połączenia jak na rys. 1a dwóch układów dodatnich z opóźnieniami zmiennych stanu. Analiza sterowalności układu zastępczego powstałego z połączenia równoległego oraz połączenia ze sprzężeniem zwrotnym może być przeprowadzona w drodze uogólnienia.

3. GŁÓWNY REZULTAT

Rozwiązanie równania stanu dodatniego układu dyskretnego (1) (bez uwzględnienia górnego indeksu k), dla $u_i \in \Re_+^m$, $i \in Z_+$ oraz warunków początkowych (2) jest nieujemne i ma postać [1]

$$x_i = \Phi(i)x_0 + \sum_{j=1}^{h}\sum_{k=1}^{h+1-j}\Phi(i-k)A_{k-1+j}x_{-j} + \sum_{j=0}^{i-1}\Phi(i-1-j)Bu_j, \tag{13}$$

gdzie $\Phi(i)$ jest macierzą podstawową. Spełnia ona równanie

$$\Phi(i+1) = A_0\Phi(i) + A_1\Phi(i-1) + \ldots + A_h\Phi(i-h), \tag{14}$$

z warunkiem początkowym

$$\Phi(0) = I_n, \quad \Phi(i) = 0 \text{ dla } i < 0. \tag{15}$$

Podstawiając $i = N$ oraz $x_N = x_f \neq 0$ do wzoru (13) otrzymamy

$$x_N = P_N + R_N u_N^0, \tag{16}$$

gdzie

$$P_N = \Phi(N)x_0 + \sum_{j=-h}^{-1} \sum_{k=1}^{h+j+1} \Phi(N-k) A_{k-1-j} x_j, \tag{17}$$

$$R_N = [\Phi(N-1)B, \Phi(N-2)B, ..., \Phi(1)B, B] \in \Re_+^{n \times Nm}, \quad u_0^N = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \in \Re_+^{Nm}, \tag{18}$$

Warunkiem koniecznym (lecz nie wystarczającym) sterowalności zastępczego układu standardowego (niedodatniego) przy połączeniu szeregowym (także równoległym i ze sprzężeniem) jest sterowalność układów składowych S_1 i S_2 np. [9]. Poniżej pokażemy, że w przypadku układu dodatniego, warunek ten jest także warunkiem wystarczającym.

Weźmy pod uwagę układ bez opóźnień, równoważny do układu zastępczego (3) w połączeniu szeregowym (rys. 1a), opisany poniższym równaniem stanu

$$x_{i+1} = \widetilde{A}\widetilde{x}_i + \widetilde{B}u_i \tag{19}$$

gdzie

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{h-1} & A_h \\ I_{2n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_{2n} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{2n} & 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^{\widetilde{n} \times \widetilde{n}}, \quad \widetilde{n} = (h+1)2n, \tag{20}$$

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^{2n \times m}, \quad \widetilde{x}_i = \begin{bmatrix} x_i^k \\ x_{i-1}^k \\ \vdots \\ x_{i-h+1}^k \\ x_{i-h}^k \end{bmatrix} \in \Re_+^{\widetilde{n}}, \quad \widetilde{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0^k \\ x_{-1}^k \\ \vdots \\ x_{-h+1}^k \\ x_{-h}^k \end{bmatrix} \in \Re_+^{\widetilde{n}}, \quad k = 1,2. \tag{21}$$

Macierze $A_0, A_1, ..., A_h, B$ tworzące strukturę $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$ mają postać (6).

Twierdzenie 1. Układ dodatni (19) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione jednocześnie poniższe warunki

i) układy S_1 i S_2 są osiągalne, tzn. istnieje taka liczba naturalna $N \in Z_+$, dla której macierz osiągalności R_N (18) tych układów zawiera nieosobliwą macierz monomialną $\overline{R}_N \in \Re_+^{n \times n}$ (tylko jeden element w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest dodatni, pozostałe są równe zero) utworzoną z n kolumn monomialnych macierzy R_N,

ii) układy S_1 i S_2 są sterowalne do zera, tzn. macierz

$$A_{S_k} = \begin{bmatrix} A_{k0} & A_{k1} & \cdots & A_{k,h-1} & A_{kh} \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^{\bar{n}\times\bar{n}}, \quad \bar{n} = (h+1)n, \quad k = 1,2 \tag{22}$$

dla poszczególnych podukładów jest nilpotentna, gdzie $A_{kj} \in \Re_+^{n\times n}$, $k = 1,2$, $j = 0,1,...,h$, są to macierze występujące w równaniu stanu (1),

iii) macierz $\widetilde{A}$ (20) jest nilpotentna.

Dowód. Dowód dla warunku i) jest podobny do podanego w pracach [2, 8] natomiast dla warunku ii) jest podobny do podanego w [12, 13]. Poniżej wykażemy, że warunek ii) implikuje warunek iii).

Jeżeli układ dodatni jest sterowalny do zera to macierz stanu układu równoważnego do tego układu jest nilpotentna, tzn. $A^{\mu} = 0$ ale $A^{\mu-1} \neq 0$, gdzie μ jest indeksem nilpotentności tej macierzy [12, 13]. Z teorii macierzy wiadomo, że macierz nilpotentna ma zerowe wartości własne, tzn. widmo σ (zbiór wartości własnych) tej macierzy jest zerowe, tj. $\sigma(A) \subset 0$ [11]. Łatwo można pokazać, że każda macierz o strukturze górno lub dolno trójkątnej z zerowymi elementami na głównej przekątnej jest zawsze macierzą nilpotentną o indeksie nilpotentości równym rozmiarowi tej macierzy, np.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow S^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{23a}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow S^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{23b}$$

gdzie $(*)$ są dowolnymi, nieujemnymi elementami.

Weźmy pod uwagę macierz $\widetilde{A}$ (20) układu równoważnego do układu (3). Z powyższego wynika, że macierz ta będzie macierzą nilpotentą wtedy, gdy $A_0 = 0,\ A_1 = 0, ..., A_h = 0$.

Wykorzystując postaci (6) tych macierzy możemy pierwszy wiersz $\widetilde{w}_1$ macierzy $\widetilde{A}$ zapisać w poniższej formie

$$\widetilde{A}_{\widetilde{w}1} = \left[\underbrace{\begin{matrix} A_{10} & 0 \\ B_2 C_1 & A_{20} \end{matrix}}_{A_0} \quad \underbrace{\begin{matrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{21} \end{matrix}}_{A_1} \quad \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \quad \underbrace{\begin{matrix} A_{1h} & 0 \\ 0 & A_{2h} \end{matrix}}_{A_h} \right]. \tag{24}$$

Ze struktury (24) wynika, że macierz $\widetilde{A}$ (20) może być nilpotentna wtedy, gdy poszczególne macierze A_{kj}, $k = 1,2$, $j = 0,1,...,h$ leżące na diagonali w $A_0, A_1,..., A_h$ są nilpotentne.

Macierz B_2C_1 nie musi spełniać tego warunku, gdyż $\widetilde{A}$ w tym przypadku przyjmie postać podobną do nilpotentnej macierzy (23b). Spełnienie warunku iii) o nilpotentności $\widetilde{A}$ (20) wynika więc z faktu, że macierz podukładu S_1 oraz S_2 o postaci (22) musi być macierzą nilpotentą. Wówczas układy te są sterowalne do zera [12, 13]. Jeżeli układy składowe są sterowalne do zera to układ (19) jest także sterowalny do zera, zaś macierz $\widetilde{A}$ (20) jest nilpotentna. ■

Twierdzenie 2. Układ dodatni (19) jest sterowalny do zera w N krokach wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P_N = 0, \tag{25}$$

gdzie P_N ma postać (17).

Dowód. Jeżeli układ dodatni (19) jest sterowalny do zera (stan końcowy $x_N = x_f = 0$) to równość (16) w tym przypadku ma postać

$$0 = P_N + R_N u_0^N. \tag{26}$$

Ponieważ w układzie zastępczym $R_N \in \Re_+^{2n\times Nm}$, $u_0^N \in \Re_+^{Nm}$ oraz $\widetilde{x}_0 \in \Re_+^{\widetilde{n}}$ więc równość (26) może być spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek (25). Wykorzystując rezultaty podane w pracy [12] bazujące na [2, 8] można stwierdzić, że warunek (25) będzie spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Phi(N) = 0,\ \Phi(N)A_1 = 0, ..., \Phi(N-h)A_h = 0\,. \tag{27}$$

gdzie $A_1, ..., A_h$ mają postać (6a), zaś macierz $\Phi(i)$ jest dana wzorem (14). ■

Wniosek. Układ zastępczy (3) jest sterowalny do zera w $N = \mu$ krokach wtedy, gdy macierz $\widetilde{A}$ tego układu o postaci (20) jest nilpotentna (zerowe wartości własne) z indeksem nilpotentności μ.

Twierdzenie 3. Jeżeli układ zastępczy (3) jest osiągalny, tzn. rząd $R_N = 2n$, gdzie macierz osiągalności $R_N \in \Re_+^{2n\times Nm}$ tego układu ma postać (18) przy macierzach (6) oraz $R_N^T[R_N R_N^T]^{-1} \in \Re_+^{Nm\times 2n}$ to nieujemny ciąg sterowań przeprowadzający ten układ z dowolnych nieujemnych warunków początkowych do zadanego nieujemnego stanu końcowego $x_N = x_f$ można wyznaczać ze wzoru

$$u_0^N = R_N^T[R_N R_N^T]^{-1}(x_f - P_N)\,. \tag{28}$$

Dowód. Jeżeli istnieje takie N, że rząd $R_N = 2n$ to $\det[R_N R_N^T]^{-1} \neq 0$ zaś macierz $R_N^T[R_N R_N^T]^{-1}$ jest w pełni określona. Podstawiając (28) do równania (16) otrzymujemy $x_N = P_N + R_N R_N^T[R_N R_N^T]^{-1} x_f - P_N = x_f$. ■

Z przedstawionych rozważań wynika, że jeżeli $N = \mu$ to równość (26) jest spełniona, gdy zachodzi (27). Ten fakt powoduje, że składnik $P_{N=\mu} = 0$, więc warunki początkowe układu nie wpływają na sterowanie (28), które można zredukować do postaci: $u_0^N = R_N^T [R_N R_N^T]^{-1} x_f$. Jest to wówczas równoważne z warunkiem osiągalności. W ogólnym przypadku mamy $N \geq \mu$. W pewnych przypadkach dla $N < \mu$ składnik P_N (17) może być różny od zera i także może istnieć nieujemna sekwencja u_0^N. Z celu sterowania wynika, że chcemy osiągnąć zadany, nieujemny stan końcowy przy nieujemnym sterowaniu. Wybór liczby kroków N, w których układ zastępczy jest sterowalny można w takim przypadku zredukować do liczby $N < \mu$, dla której otrzymamy $u_0^N \in \Re_+^{Nm}$.

4. PRZYKŁAD

Należy zbadać sterowalność układu zastępczego przy połączeniu szeregowym (rys. 1a) układów z dwoma opóźnieniami ($h = 2$) o macierzach

$$\begin{gathered} A_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{20} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{29}$$

i warunkach początkowych

$$x_0^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_{-1}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_{-2}^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, x_0^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x_{-1}^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, x_{-2}^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Sprawdzimy na początku warunki i) oraz ii) twierdzenia 1 dla poszczególnych układów składowych. Macierz (22) ma postać

$$A_{S_1} = \begin{bmatrix} A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ I_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 \end{bmatrix}, \ A_{S_2} = \begin{bmatrix} A_{20} & A_{21} & A_{22} \\ I_3 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 \end{bmatrix}, \tag{31}$$

Dokonując niezbędnych podstawień można sprawdzić, że macierze (31) są nilpotentne z indeksem nilpotentności $\mu = 6$, tzn. $A_{S_1}^6 = 0$, $A_{S_2}^6 = 0$. Dla $N = \mu = 6$ macierz osiągalności $R_N = R_6$ każdego podukładu, wyznaczona ze wzoru (18) ma $n = 3$ kolumny monomialne, zaś $R_6^T [R_6 R_6^T]^{-1} \in \Re_+^{12\times 3}$. Jest zatem spełniony warunek i) oraz ii) twierdzenia 1. Łatwo można sprawdzić, że jest także spełniony warunek iii) tego twierdzenia, ponieważ macierz układu zastępczego (20) jest macierzą nilpotentną z indeksem nilpotentności $\mu = 10$, tzn. $\widetilde{A}^{10} = 0$. Układ zastępczy jest zatem sterowalny do zera w $N = 10$ krokach. Łatwo można sprawdzić, że dla $N = 10$ jest spełniony warunek (27) i w konsekwencji warunek (25) twierdzenia 2, gdyż składnik $P_N = P_{10}$ wyznaczony ze wzoru (17) jest równy

$$P_{10} = \Phi(10)\begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{bmatrix} + \left(\Phi(9)A_1 + \Phi(8)A_2\right)\begin{bmatrix} x_{-1}^1 \\ x_{-1}^2 \end{bmatrix} + \Phi(9)A_2\begin{bmatrix} x_{-2}^1 \\ x_{-2}^2 \end{bmatrix} = 0, \tag{32}$$

gdzie A_1, A_2 mają postać (6) przy zadanych macierzach (29) zaś $\Phi(8), \Phi(9), \Phi(10)$ wyznaczamy ze wzoru (14). Dla $N = 10$ sterowanie (28) nie zależy od warunków początkowych (30). Sprawdźmy osiągalność układu zastępczego przyjmując mniejszą liczbę kroków N niż 10, np. równą 4. Dla $N = 4$ macierz R_N (18) układu zastępczego ma postać

$$R_4 = [\Phi(3)B, \Phi(2)B, \Phi(1)B, B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Re_+^{6\times 8}, \tag{33}$$

gdzie B jest dana wzorem (6) przy macierzach (29) zaś $\Phi(3), \Phi(2), \Phi(1)$ wyznaczamy z (14). Warunek osiągalności dla układu zastępczego przy $N = 4$ jest spełniony, ponieważ macierz (33) ma $2n = 6$ kolumn monomialnych. Obliczając $P_N = P_4$ ze wzoru (17) a następnie wyznaczając ciąg sterowań u_0^N (28), który przeprowadza układ zastępczy o macierzach (29) ze stanu określonego przez warunki (30) do stanu końcowego $x_f = [8 \quad 4 \quad 6 \quad 5 \quad 10 \quad 7]^T$ w $N = 4$ krokach, otrzymujemy

$$u_0^N = u_0^4 = [0 \quad 2.4 \quad 4.0 \quad 0 \quad 3.0 \quad 4.0 \quad 1.2 \quad 8.0]^T. \tag{34}$$

Można łatwo sprawdzić, że macierze A_{kj}, $k = 1,2$, $j = 0,1,\dots,h$ (29) są nilpotentne. Natomiast zmiana elementów, np. macierzy A_{21} z postaci (29) na

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{35}$$

powoduje, że ciąg sterowań (28) dla $N = 4$ z tą macierzą ma ujemne składowe, tj.

$$u_0^4 = [-5.5 \quad 2.4 \quad -11.0 \quad 0 \quad -5.0 \quad 4.0 \quad 1.2 \quad 8.0]^T. \tag{36}$$

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem sterowalności dwóch układów dodatnich z wieloma opóźnieniami zmiennych stanu połączonych szeregowo. Dla rozpatrywanego połączenia tych układów sformułowano warunek konieczny i wystarczający sterowalności oraz podano metodę wyznaczania nieujemnego ciągu sterowań, które przeprowadza układ zastępczy z nieujemnych warunków początkowych do zadanego nieujemnego stanu końcowego. Warunek sterowalności w rozważanym układzie zastępczym może być spełniony tylko wtedy, gdy każdy układ składowy jest osiągalny, natomiast każda macierz A_{kj}, $k = 1,2,\ j = 0,1,...,h$ występująca w równaniu (1) jest nilpotentna. Przedstawione rozważania można uogólnić na dowolną konfigurację n-układów dodatnich, także z wieloma opóźnieniami w sterowaniu. Interesujący przedmiot rozważań mogłaby stanowić problematyka sterowalności wyjściowej, bowiem w połączeniu szeregowym sterowanie kolejnego układu odbywa się za pomocą nieujemnego wektora wyjścia z układu poprzedniego.

***

Praca naukowa wykonana w ramach pracy S/WE/1/06 finansowanej przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

Literatura

1. Busłowicz M.: O pewnych właściwościach rozwiązania równania stanu dyskretnego układu z opóźnieniami. Zeszyty Nauk. Polit. Białostockiej, Elektrotechnika, nr. 1, s. 17-29, Białystok, 1983.
2. Busłowicz M., Kaczorek T.: Reachability and minimum energy control of positive linear discrete-time systems with one delay. Proc. 12th Mediterranean Conference on Control and Automation, Kasadasi, Izmir, Turkey, 2004 (CD-ROM).
3. Chen C-T., Desoer C.A.: Controllability and observability of composite systems. IEEE Trans. On Automatic Control, vol. AC-12, No. 4, pp.402-409, 1967.
4. Davison E. J., Wang S. H.: New results on the controllability and observability of general composite systems. IEEE Trans. on Automatic Control, pp. 123-128, 1975.
5. Kaczorek T.: Teoria wielowymiarowych układów dynamicznych liniowych, WNT, Warszawa, 1983.
6. Kaczorek T.: Positive 1D and 2D systems. Springer-Verlag, London, 2002.
7. Kaczorek T., Busłowicz M.: Wyznaczanie realizacji złożonych układów dodatnich z opóźnieniami. Mat. XXVIII Konf. IC-SPETO'05, Tom 2, s.349-352, 2005, Gliwice-Ustroń.
8. Kaczorek T., Busłowicz M.: Reachability and minimum energy control of positive discrete-time linear systems with multiple delays in state and control. Pomiary Automatyka Kontrola, PAK vol. 53, nr. 10, s.40-44, 2007.
9. Klamka J.: Ocena sterowalności i obserwowalności układów złożonych poprzez kanoniczną formę Jordana. Podstawy Sterowania, Tom 5, z.1, pp.43-62, 1975.
10. Klamka J.: Sterowalność układów dynamicznych, PWN, Warszawa-Wrocław, 1990.
11. Meyer C. D.: Matrix analysis and applied linear algebra. SIAM, 2000.
12. Trzasko W., Kociszewski R.: Sterowalność dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniem od stanu i sterowania. Mat. XV Krajowej Konferencji Automatyki, Tom 1. s. 227-230, Warszawa, 2005.
13. Xie G., Wang L.: Reachability and controllability of positive linear discrete-time systems with time-delays. In: Positive Systems (Benvenuti, De Santis and Farina (Eds.)), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pp. 377-384, 2003.