doc. dr inż. Wadim Kramar
Sewastopolski Narodowy Uniwersytet Techniczny (Ukraina)
dr hab. inż. Antoni Świć, prof. PL
Instytut Technologicznych Systemów Informacyjnych, Politechnika Lubelska

SYNTEZA EKWIWALENTNEGO MODELU WIELOTAKTOWEGO WIELOWYMIAROWEGO UKŁADU STEROWANIA

Zaprezentowany model matematyczny, oparty na podejściu macierzowym, wielotaktowego układu wielowymiarowego umożliwia opracowywanie elementów skomputeryzowanych układów analizy i projektowania wielowymiarowych wielotaktowych ciągło-dyskretnych układów sterowania automatycznego.

SYNTHESIS OF AN EQUIVALENT MODEL OF MULTISTROKE AND MULTIDIMENSIONAL CONTROL SYSTEM

They present a mathematical model of a multidimensional system on the basis of a matrix approach. It enables drawing up elements of computer based systems of analysis and designing the multidimensional and multistorke continuous-discrete systems of automatic control

1. WPROWADZENIE

Dla współczesnych systemów sterownia automatycznego charakterystyczne jest zastosowanie w kanałach pomiarowych i przetwarzania, obok urządzeń o działaniu ciągłym, mikroprocesorów i techniki komputerowej. Najczęściej podobne układy sterowania mierzą i przetwarzają kilku sygnałów w trybie podziału czasu. Modelem matematycznym takich układów są wielotaktowe wielowymiarowe ciągle dyskretne układy sterowania automatycznego. Badania podobnych układów wskazują na konieczność opracowania kompleksowych modeli z transmitancjami jako głównymi elementami modeli. Dla układów jednotaktowych rozwiązanie tego zagadnienia uzyskiwane jest drogą zastosowania metody Sedlara i Bekeya [1]. W przypadku występowania kilku różnych taktów stosowane jest podejście Coffeya i Williamsa [2]. W artykule do budowy ekwiwalentnego modelu wielowymiarowego układu ciągło-dyskretnego zaproponowano podejście macierzowe.

2. MODEL MATEMATYCZNY BADANEGO UKŁADU

Rozpatrywany jest wielowymiarowy układ liniowy o łańcuchach cyfrowych i analogowych, określonych odpowiednimi transmitancjami. Niech $u(s)$ wektor oddziaływań sterujących na obiekt, a $y(s)$ – wektor wyjść obiektu. Wymiarowość wektorów odpowiednio jest równa m i p. Niech $x_1(s), x_2(s), \ldots, x_r(s)$ – zmienne kwantowane o okresach odpowiednio $T_1, T_2, \ldots, T_r$ (wśród nich mogą być również równe) i niech

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_r \end{bmatrix} \tag{1}$$

jest odpowiednim wektorem.

Równania obiektu ciągłego i łańcuchów analogowych układu od obiektu do kluczy kwantowania rozpatrywane są odpowiednio w postaci

$$y(s) = W_0(s)u(s),\quad x(s) = E(s)y(s) + B(s)u(s), \tag{2}$$

gdzie $W_0(s),\ E(s),\ B(s)$ - macierze transmitancji o odpowiedniej wymiarowości. A więc

$$x(s) = U(s)u(s), \tag{3}$$

gdzie $U(s) = E(s)W_0(s) + B(s)$.

Załóżmy, że okresy kwantowania $T_1,\ T_2,\ ...,\ T_r$ są krotne pewnemu taktowi, tj. można je przedstawić w postaci

$$T_1 = n_1T,\ T_2 = n_2T,\ \ldots, T_r = n_rT, \tag{4}$$

gdzie $n_1, n_2, \ldots, n_r$ – liczby naturalne.

Niech

$$x^*_{1T_1}(s),\ x^*_{2T_2}(s), \ldots, x^*_{rT_r}(s)$$

przekształcenia dyskretne Laplace'a kwantowane odpowiednio według okresów $T_1, T_2, \ldots, T_r$ zmiennych $x_1(t),\ x_2(t), \ldots, x_r(t)$. Każdy z kwantowanych sygnałów $x_i(k_iT_i),\ k_i = 0,1,\ldots,\ i \in \overline{1,r}$ przekształcany jest przez właściwy łańcuch cyfrowy i sumowany z innymi podobnymi sygnałami, w wyniku czego kształtowane jest oddziaływanie. Oprócz łańcuchów cyfrowych i kształtowania oddziaływań sterowniczych mogą być stosowane także i łańcuchy analogowe (z wyjść obiektu). Uwzględniając to, można zapisać równanie dla „k - tej" składowej wektora oddziaływania sterowniczego w następującej postaci

$$u_k(s) = -\sum_{i=1}^{r} d_{ki}(s)x^*_{iT_i}(s) - \sum_{i}^{p} f_{ki}(s)y_i(s) + u_{oz}(s), \tag{5}$$

gdzie $d_{ki}(s),\ f_{ki}(s)$ – transmitancje łańcuchów cyfrowych i analogowych, a $u_{oz}(s)$ - oddziaływanie zadające, formowane w łańcuchu cyfrowym. Dla szerokiej klasy przypadków sumowania i przekształcenia cyfrowo - analogowego sygnałów można przyjąć, że

$$d_{ki}(s) = a(s)W^*_{kiT_i}(s), \tag{6}$$

$$u_{oz}(s) = a(s)u^*_{ozT}(s), \tag{7}$$

gdzie $a(s) = \dfrac{1-e^{-Ts}}{s}$, i $W^*_{kiT_i}(s),\ u^*_{oz}(s)$ - okresowe (odpowiednio o okresach $2\pi j/T_i$ i $2\pi j/T$) funkcje, charakteryzujące przekształcenia cyfrowe i cyfrowo-analogowe.

Rozpatrzymy teraz macierze $W_*(s)$ o elementach $W^*_{kiT_i}(s)$, a także wektory $x_*(s),\ v^*(s)$, o elementach $x^*_{iT_i}(s)$ i $u^*_{ozT}(s)$. Symbol * na dole oznacza okresowość macierzy $W_*(s)$ i wektora $x_*(s)$. Wszystkie te elementy, zgodnie z wyrażeniem (4), odpowiadają zależnościom postaci $x(s + 2\pi j/T) = x(s)$, a więc dla rozpatrywanych macierzy $W_*(s)$ i wektora $x_*(s)$ mają miejsce zależności typu

$$(cb_*)^*_T = c^*_T b_* \text{ lub } (b_*c)^*_T b_* c^*_T). \tag{8}$$

Uwzględniając (6), (7) i zapisując równania oddziaływań sterowniczych w wektorowo - macierzowej postaci

$$u(s) = -a(s)W_*(s)x_*(s) - F(s)y(s) + a(s)v^*(s), \tag{9}$$

gdzie $F(s)$ - macierz $m\times p$ o elementach f_{ki}, otrzymamy przy uwzględnieniu zależności (1) i (2)

$$u(s) = -G(s)W_*(s)x_*(s) + G(s)v^*(s), \tag{10}$$

$$x(s) = -C(s)W_*(s)x_*(s) + C(s)v^*(s), \tag{11}$$

$$y(s) = -L(s)W_*(s)x_*(s) + L(s)v^*(s), \tag{12}$$

gdzie $G(s) = a(s)(I + F(s)W_0(s))^{-1},\ C(s) = U(s)G(s),\ L(s) = W_0(s)G(s)$.

3. EKWIWALENTNY MODEL UKŁADU

Model układu wielotaktowego może być przekształcony w model układu jednotaktowego o okresie kwantowania, będącym największym wspólnym podzielnikiem okresów kwantowania $T_1, T_2, \ldots T_r$. Odchodzi się, więc od zależności [3]

$$y^*_{nT}(s) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y^*_T(s + \frac{2\bullet j}{nT}(k-1)),\ (xy^*_{nT})^*_T = x^*_T y^*_{nT} \tag{13}$$

Symbol T w oznaczeniu odpowiedniego przekształcenia impulsowego będzie opuszczany. Rozpatrując zależność (11) mamy

$$x^*(s) = - C^*(s)W_*(s)x_*(s)+C^*(s)v^*(s). \tag{14}$$

Zamieniając w tej zależności s na $s + \frac{2\pi j}{NT}(\upsilon - 1)$, gdzie N, υ- pewne liczby naturalne, otrzymamy

$$x^{*\upsilon}(s) = -C^{*\upsilon}(s)W_*^{\upsilon}(s)x_*^{\upsilon}(s) + C^{*\upsilon}(s)v^{*\upsilon}(s), \tag{15}$$

dla dowolnej funkcji $\varphi(s)$ przyjmujemy

$$\varphi^{\upsilon}(s) = \varphi(s + \frac{2\pi j}{NT}(\upsilon - 1)). \tag{16}$$

Zakładając w zależnościach (15) υ = 1, ... , N , zapiszemy tworzącą się w taki sposób zbiorowość w postaci

$$\hat{x}^*(s) = -\hat{C}^*(s)\hat{W}_*(s)\hat{x}_*(s) + \hat{C}^*(s)\hat{v}^*(s) \tag{17}$$

gdzie

$$\hat{x}(s) = (x^1{}'(s), x^2{}'(s), \ldots, x^N{}'(s))', \tag{18}$$

$$\hat{x}_*(s) = (x_*^1{}'(s), x_*^2{}'(s), \ldots, x_*^N{}'(s))', \tag{19}$$

$$\hat{v}(s) = (v^1{}'(s), v^2{}'(s), \ldots, v^N{}'(s))', \tag{20}$$

$$\hat{C}(s) = diag(C^1(s), C^2(s), \ldots, C^N(s)), \tag{21}$$

$$\hat{W}(s) = diag(W^1(s), W^2(s), \ldots, W^N(s)). \tag{22}$$

Rozpatrzymy składowe wektora $x^{\upsilon}{}_{*}(s)$

$$x_{iT_i}^{*\upsilon}(s)=\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}x_i^*(s+\frac{2\pi j}{NT}(\upsilon-1)+\frac{2\pi j}{n_iT}(k-1)) \tag{23}$$

Niech N – najmniejsza ogólna krotna liczba $n_1,n_2,...,n_r$:

$$N = \upsilon_1 n_1,\ N = \upsilon_2 n_2,\ ...\ ,N = \upsilon_r n_r\ ,$$

gdzie $\upsilon_1,\upsilon_2, ... ,\upsilon_r$ – liczby naturalne. A więc zależność (23) można zapisać w postaci

$$x_{iT_i}^{*\upsilon}(s)=\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i}x_i^*(s+\frac{2\pi j}{NT}[\upsilon+\upsilon_i(k-1)-1]) \tag{24}$$

Zauważmy, że dla dowolnego p > N (zakładając p = fN+υ) będziemy mieć

$$x_i^*(s+\frac{2\pi j}{NT}l)=x_i^*(s+\frac{2\pi j}{NT}\upsilon) \tag{25}$$

w związku z okresowością funkcji $x^*{}_i(s)$ po s o okresie $2\pi j/T$. Zgodnie z zależnością (25) prawa część równania (24) zawiera tylko wartości x(s), a więc istnienie liniowe przekształcenie wektora $\hat{x}^*(s)$ w $\hat{x}_*(s)$, co można zapisać

$$\hat{x}_*(s)=\prod\hat{x}^*(s) \tag{26}$$

gdzie Π – rN x rN macierz cyfrowa. Podstawiając zależność (26) do zależności (17) znajdujemy

$$\hat{x}^*(s)=(I_{rN}+\hat{C}^*(s)\hat{W}_*(s)\prod)^{-1}\hat{C}^*(s)\hat{v}^*(s) \tag{27}$$

Można więc zapisać

$$\hat{y}(s)=-\hat{L}(s)\hat{W}_*(s)\hat{x}_*(s)+\hat{L}(s)\hat{v}^*(s)$$

gdzie

$$\hat{y}(s)=(y^1(s),y^2(s),...,y^N(s)),\quad \hat{L}(s)=diag(L^1(s),L^2(s),...,L^N(s)) \tag{28}$$

w oparciu o zależności (26) i (27) określimy

$$\hat{y}(s)=\hat{L}(s)\{-\hat{W}_*(s)\prod(I_{rN}+\hat{C}^*(s)\hat{W}_*(s)\prod)^{-1}\hat{C}^*(s)+I_{mN}\}\hat{v}^*(s)\ . \tag{29}$$

Stosując tożsamość

$$I-A(I+BA)^{-1}B = (I+AB)^{-1} \tag{30}$$

określamy

$$\hat{y}(s)=\hat{L}(s)(I_{mN}+\hat{W}_*(s)\prod\hat{C}^*(s))^{-1}\hat{v}^*(s) \tag{31}$$

i

$$\hat{y}^*(s)=\hat{L}^*(s)(I_{mN}+\hat{W}_*(s)\prod\hat{C}^*(s))^{-1}\hat{v}^*(s)\ . \tag{32}$$

Określamy macierz Π jako blokową Π = $\{\Pi_{\upsilon p}\}$, $\upsilon \in 1,..., N$, gdzie $\Pi_{\upsilon p}$ - r•r - macierz i wprowadzając oznaczenie

$$W^*=\hat{W}_*\prod\hat{C}^* \tag{33}$$

określimy elementy blokowego prezentacji tej macierzy

$$W^*(s)=\{W_{\upsilon p}^*(s)\},\upsilon p\in 1,...,N \tag{34}$$

$$W_{\upsilon p}^*(s)=W_*^{\upsilon}(s)\prod\nolimits_{\upsilon p}C^{*p}(s),\upsilon,p\in 1,...,N\ . \tag{35}$$

W tej prezentacji $W_*^{\upsilon}(s)=W_*(s+\frac{2\pi j}{NT}(\upsilon-1)),\upsilon\in 1,...,N,$ (36)

$$C^{*p}(s)=C^*(s+(p-1)\frac{2\pi j}{NT}),\ p\in 1,...,N\ . \tag{37}$$

Elementy blokowe $\Pi_{\upsilon p}$, $\upsilon, p \in 1,...,N$ mają postać

$$\prod_{\upsilon p} = diag(\pi^1_{\upsilon p}, \pi^2_{\upsilon p}, ..., \pi^r_{\upsilon p}). \qquad (38)$$

Po wykonaniu elementarnych operacji z zależności (35) dla elementów macierzy $W^*_{\upsilon p}$ otrzymamy

$$W^{*\sigma\mu}_{\upsilon p}(s) = \sum_{i=1}^{r} \pi^i_{\upsilon p} W_{*\sigma i}(s + (\upsilon - 1)\frac{2\pi j}{NT}) C^*_{i\mu}(s + (p - 1)\frac{2\pi j}{NT}). \qquad (39)$$

Budowa macierzy (34) otwartego ekwiwalentnego układu jednotaktowego umożliwia znalezienie wyjść zamkniętego układu początkowego, kwantowanych w momentach kT, k=0,1,... , w tym celu określa się macierz

$$H^*(s) = (I_{mN} + W^*(s))^{-1} \qquad (40)$$

w postaci blokowej

$$H^* = \{H^*_{\upsilon p}\},\ \upsilon, p \in 1, ..., N. \qquad (41)$$

Z zależności (24) znajdujemy

$$y^*(s) = \sum_{p=1}^{N} L^*(s) H^*_{1p}(s) u^{*l}(s) \qquad (42)$$

gdzie: $y^*(s) = y^{*1}(s), L^*(s) = L^{*1}(s)$.

Uzyskana ekwiwalentna prezentacja modelu matematycznego wielotaktowego wielowymiarowego układu umożliwia opracowywanie elementów skomputeryzowanych układów analizy i projektowania wielowymiarowych wielotaktowych ciągło-dyskretnych układów sterowania.

LITERATURA

1. Sedlar M., Bekey G., Signal Flow Graphs of Sampled – Data Systems: A New formulation// IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-12,2, April 1967, pp. 154-161.
2. Coffey T.C., Williams I.J., Stability Analysis of Multiloop, Multirate, Sampled Systems // AIAA Journal, Vol.-4, December 1968, pp. 129-144.
3. Джури Э., Импульсные системы автоматического регулирования.-М.:Физматгиз, 1963.
4. Куо Б., Теория и проектирование цифровых систем управления.-М.:Машиностроение, 1986.