dr inż. Wojciech Trzasko
Politechnika Białostocka w Białymstoku

OSIĄGALNOŚĆ I STEROWALNOŚĆ DODATNICH UKŁADÓW DYSKRETNYCH UŁAMKOWEGO RZĘDU Z OPÓŹNIENIEM

W pracy rozpatrzono dodatnie układy dyskretne ułamkowego rzędu liniowe stacjonarne z opóźnieniem zmiennych stanu. Podano warunki, jakie musi spełniać dyskretny układ ułamkowego rzędu, aby być układem dodatnim. Sformułowane zostały warunki osiągalności i sterowalności do zera dla przypadku, gdy opóźnienie od stanu jest równe jedności. Rozważania zilustrowano przykładem.

REACHABILITY AND CONTROLLABILITY OF POSITIVE FRACTIONAL DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH DELAY

In the paper the positive fractional discrete-time linear systems with delay in state is considered. Necessary and sufficient conditions are established for the positivity, reachability and null controllability in case of delay in state is equal to one The considerations are illustrated by an example.

1. WSTĘP

W układach dodatnich składowe wektorów wymuszeń, warunków początkowych, stanu i wyjścia przyjmują tylko wartości nieujemne. Przykłady dodatnich układów liniowych są podane w monografii [3] oraz cytowanej tam literaturze.

W teorii układów dodatnich zamiast przestrzeni liniowych korzystamy z teorii stożków. Teoria układów dodatnich jest więc dziedziną znacznie trudniejszą i mniej zaawansowaną od klasycznej teorii układów liniowych. Problem analizy i syntezy dodatnich układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniem od stanu jest tematem wielu publikacji w ostatnich kilku latach, np. [1, 3, 9, 11].

W ostatnich latach coraz częściej wykorzystuje się teorię rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu [7, 8, 12] w zagadnieniach modelowania zjawisk fizycznych i projektowania regulatorów ułamkowych dla układów z opóźnieniem [5, 10]. W pracy [6] rozpatrzono problem sterowalności i obserwowalności ciągłego układu ułamkowego rzędu.

W niniejszej pracy, wykorzystując rezultaty prac [1, 3, 4, 9], rozpatrzymy problem osiągalności i sterowalności do zera dyskretnych dodatnich układów ułamkowych liniowych stacjonarnych z jednym opóźnieniem od stanu. Najpierw podane zostaną podstawowe definicje i warunki, jakie musi spełniać dyskretny układ ułamkowego rzędu z opóźnieniem, aby był on układem dodatnim.

2. WPROWADZENIE

Niech $\Re^{N\times m}$ będzie zbiorem macierzy o wymiarach $N\times m$ o rzeczywistych elementach oraz $\Re^{N}=\Re^{N\times 1}$. Zbiór macierzy o wymiarach $N\times m$, których elementami są liczby rzeczywiste nieujemne, będziemy oznaczać przez $\Re_+^{N\times m}$, przy czym $\Re_+^{N}=\Re_+^{N\times 1}$. Zbiór liczb całkowitych dodatnich będziemy oznaczać przez Z_+, zaś macierz jednostkową o wymiarach $N\times N$ przez I.

Jako definicję różniczko-całki ułamkowego rzędu w pracy została przyjęta definicja Grünwalda-Letnikova [7, 8, 12], która dla układów dyskretnych ma postać

$$\Delta^n x_i = \frac{1}{h^n}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{n}{j}x_{i-j} = \frac{1}{h^n}\sum_{j=0}^{i}\omega_j^{(n)}x_{i-j}, \tag{1}$$

gdzie $n \in R$ jest ułamkowym rzędem, a h jest okresem próbkowania, $i \in Z_+$ jest numerem próbki, dla której jest obliczana różniczko-całka. Gdy n jest dodatnie otrzymujemy wzór na różniczkę, dla n ujemnych mamy wzór na całkę, zaś gdy $n = 0$ otrzymujemy tę samą funkcję.

Współczynniki $\omega_j^{(n)}$ zdefiniowane są następująco [7]

$$\omega_j^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = 0 \\ (-1)^j \dfrac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!} & \text{dla } j = 1,2,... \end{cases} \tag{2}$$

lub korzystając ze wzoru rekurencyjnego [12]

$$\omega_0^{(n)} = 1,\ \ \omega_j^{(n)} = (1 - \frac{1+n}{j})\omega_{j-1}^{(n)},\ \ j = 1,2,\ldots \tag{3}$$

W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że $h = 1$.

Weźmy pod uwagę dyskretny układ liniowy z opóźnieniem od stanu, opisany równaniem stanu ułamkowego rzędu i równaniem wyjścia

$$\Delta^n x_{i+1} = A_0 x_i + A_1 x_{i-1} + Bu_i,\ \ i \in Z_+, \tag{4a}$$

$$y_i = Cx_i + Du_i, \tag{4b}$$

gdzie $x_i \in \Re^N$, $u_i \in \Re^m$, $y_i \in \Re^p$, $A_0 \in \Re^{N\times N}$, $A_1 \in \Re^{N\times N}$, $B \in \Re^{N\times m}$, $C \in \Re^{p\times N}$, $D \in \Re^{p\times m}$, przy warunkach początkowych

$$x_{-i} = x(-i) \in \Re^N,\ \ i = 0,1. \tag{5}$$

Uwzględniając definicję Grünwalda-Letnikova (1) dla $h = 1$, równania (4) możemy napisać w postaci

$$x_{i+1} + \sum_{j=1}^{i+1}(-1)^j\binom{n}{j}x_{i-j+1} = A_0 x_i + A_1 x_{i-1} + Bu_i,\ \ i \in Z_+, \tag{6a}$$

$$y_i = Cx_i + Du_i. \tag{6b}$$

Wyznaczając współczynniki $\omega_j^{(n)}$ dla $j = 1,2$ i porządkując równanie (6a) względem kolejnych opóźnień zmiennych stanu, otrzymamy inną postać równania stanu

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (A_0 - \omega_1^{(n)}I)x_i + (A_1 - \omega_2^{(n)}I)x_{i-1} - \sum_{j=3}^{i+1}\omega_j^{(n)}x_{i-j+1} + Bu_i = \\ &= (A_0 + \omega_1 I)x_i + (A_1 + \omega_2 I)x_{i-1} + \sum_{j=3}^{i+1}\omega_j x_{i-j+1} + Bu_i \\ &= (A_0 + nI)x_i + (A_1 - \binom{n}{2}I)x_{i-1} + \sum_{j=3}^{i+1}\omega_j x_{i-j+1} + Bu_i,\quad i \in Z_+, \end{aligned} \tag{7}$$

przy czym $\omega_j = -\omega_j^{(n)}$, gdzie $\omega_j^{(n)}$ wyznacza się ze wzorów (2) lub (3).

Łatwo zauważyć, że ułamkowy układ dyskretny (6) jest równoważny standardowemu układowi dyskretnemu z nieskończoną liczbą opóźnień od zmiennych stanu [1]

$$x_{i+1} = \sum_{h=0}^{i} \overline{A}_h x_{i-h}, \; i \in Z_+, \tag{8}$$

gdzie macierze stanu mają postać

$$\overline{A}_0 = A_0 + nI, \; \overline{A}_1 = A_1 - \binom{n}{2} I, \; \overline{A}_h = \omega_{h+1} I, \; h = 2,3,\ldots,i. \tag{9}$$

Zauważmy, że współczynniki $\omega_j = -\omega_j^{(n)}$ maleją do zera, gdy j rośnie do nieskończoności.

Twierdzenie 1. Rozwiązanie równania stanu (6a) z warunkami początkowymi (5) ma postać

$$x_i = \Phi_i x_0 + \Phi_{i-1}(A_1 + \omega_2 I)x_{-1} + \sum_{j=0}^{i-1} \Phi_{i-1-j} B u_j, \tag{10}$$

gdzie Φ_i jest macierzą podstawową (tranzycyjną), spełnia ona równanie

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1} &= (A_0 + nI)\Phi_i + (A_1 + \omega_2 I)\Phi_{i-1} + \sum_{j=3}^{i+1} \omega_j \Phi_{i-j+1} = \\ &= \Phi_i (A_0 + nI) + \Phi_{i-1}(A_1 + \omega_2 I) + \sum_{j=3}^{i+1} \omega_j \Phi_{i-j+1}, \end{aligned} \tag{11}$$

z warunkiem początkowym

$$\Phi_0 = I, \; \Phi_i = 0 \text{ dla } i < 0, \tag{12}$$

przy czym $\omega_j = -\omega_j^{(n)}$, gdzie $\omega_j^{(n)}$ wyznacza się ze wzorów (2) lub (3).

Dowód. Dowód przeprowadzimy, podobnie jak w pracach [2, 4], korzystając z przekształcenia (transformaty) Z funkcji dyskretnych.

Dokonując obustronnej transformaty Z równania (6a) przy niezerowych warunkach początkowych (5), otrzymamy

$$zX(z) - zx_0 + \sum_{j=1}^{i+1} \omega_j^{(n)} z^{-(j-1)} X(z) + \omega_2^{(n)} x_{-1} = A_0 X(z) + A_1 z^{-1}(X(z) + x_{-1} z) + BU(z). \tag{13}$$

Po przekształceniach dostaniemy

$$X(z) = \left[I\Delta^n(z^{-1}) - A_0 z^{-1} + A_1 z^{-2} \right]^{-1} \left(x_0 + (A_1 + \omega_2 I) z^{-1} x_{-1} + Bz^{-1} U(z) \right), \tag{14}$$

gdzie

$$\Delta^n(z^{-1}) = \sum_{j=0}^{i+1} \omega_j^{(n)} z^{-j}. \tag{15}$$

Niech

$$\left[I\Delta^n(z^{-1}) - A_0 z^{-1} + A_1 z^{-2} \right]^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi(i) z^{-i}, \tag{16}$$

wówczas równanie (14) możemy napisać w postaci

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi(i) z^{-i} \left(x_0 + (A_1 + \omega_2 I) z^{-1} x_{-1} + Bz^{-1} U(z) \right). \tag{17}$$

Dokonując odwrotnego przekształcenia Z otrzymamy rozwiązanie równania różnicowego ułamkowego rzędu (6a) w postaci (10).

Podstawiając (16) do równości $[I\Delta^n(z^{-1}) - A_0 z^{-1} + A_1 z^{-2}][I\Delta^n(z^{-1}) - A_0 z^{-1} + A_1 z^{-2}]^{-1} = I$, otrzymamy

$$\left[I\left(\sum_{j=0}^{i+1} \omega_j^{(n)} z^{-j}\right) - A_0 z^{-1} + A_1 z^{-2}\right]\left(\sum_{j=0}^{\infty} \Phi_i z^{-i}\right) = I. \tag{18}$$

Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej z^{-i}, $i = 0,1,\ldots,$ w (18) otrzymamy

$$\Phi_0 = I,\ \Phi_1 = A_0 + In,\ \Phi_2 = (A_0 + In)\Phi_1 + (A_1 + \omega_2 I)\Phi_0, \tag{19}$$

i w ogólnym przypadku zależność (11). ■

Prawdziwość drugiej zależności w (11) na wyznaczanie macierzy podstawowej można wykazać podobnie jak w pracy [2] dla standardowego układu dyskretnego z opóźnieniami.

Rozwiązanie (10) równania stanu układu ułamkowego można także wyprowadzić z zależności (7), wyznaczając bezpośrednio kolejne wartości x_i, $i = 0,1,2,\ldots$

3. DODATNI UKŁAD UŁAMKOWEGO RZĘDU

Definicja 1. [3, 4] Układ ułamkowy (4) nazywamy dodatnim (wewnętrznie), jeżeli dla nieujemnych warunków początkowych $x_{-i} \in \Re_+^N$, $i = 0,1$, i każdego nieujemnego ciągu sterującego $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,\ldots,$ zachodzi $x_i \in \Re_+^N$ i $y_i \in \Re_+^p$ dla wszystkich $i \in Z_+$.

Poniższe lematy zostaną wykorzystane do podania warunków dodatniości dyskretnego układu ułamkowego (4) z opóźnieniem od stanu.

Lemat 1. [4] Jeżeli ułamkowy rząd n spełnia zależność

$$0 < n \le 1, \tag{20}$$

to współczynniki ω_j są dodatnie, tzn.

$$\omega_j = -\omega_j^{(n)} = (-1)^{j+1}\binom{n}{j} > 0.\ \ j = 1,2,\ldots \tag{21}$$

Dowód lematu podany został w pracy [4].

Lemat 2. Jeżeli ułamkowy rząd n spełnia zależność (20) i

$$A_0 + nI \in \Re_+^{N\times N},\ \ A_1 + \omega_2 I \in \Re_+^{N\times N}, \tag{22}$$

to macierze podstawowe mają wszystkie elementy nieujemne, tzn.

$$\Phi_i \in \Re_+^{N\times N}, \quad i \in Z_+. \tag{23}$$

Dowód lematu wynika wprost z zależności (11) i został podany w pracy [4] stosując metodę indukcji matematycznej.

Twierdzenie 2. Układ dyskretny ułamkowego rzędu (4), dla $0 < n \le 1$, jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_0 + In \in \Re_+^{N\times N},\ A_1 + \omega_2 I \in \Re_+^{N\times N},\ B \in \Re_+^{N\times m},\ C \in \Re_+^{p\times N},\ D \in \Re_+^{p\times m}. \tag{24}$$

Dowód. Dostateczność: Z lematu 2 wynika, że jeżeli zachodzi (22), to $\Phi(i) \in \Re_+^{N \times N}$ dla $i = 0,1,2,...$ Z (10) i (6b) wynika, że jeżeli zachodzi (23) i (24), to dla $x_0 \in \Re_+^N$, $x_{-1} \in \Re_+^N$ i $u_i \in \Re_+^m$, $i \in Z_+$, mamy $x_i \in \Re_+^N$ oraz $y_i \in \Re_+^p$ dla wszystkich $i \in Z_+$.

Konieczność: Niech $u_i = 0$ dla $i \in Z_+$. Wtedy z równania (7) dla $i = 0$ otrzymamy $x_1 = (A_0 + nI)x_0 + (A_1 + \omega_2 I)x_{-1}$ oraz z (6b) mamy $y_0 = Cx_0 \in \Re_+^p$, co implikuje $A_0 + In \in R_+^{N \times N}$ i $A_1 + \omega_2 I \in \Re_+^{N \times N}$ oraz $C \in \Re_+^{p \times N}$, gdyż $x_0 \in \Re_+^N$ i $x_{-1} \in \Re_+^N$ mogą być dowolne. Zakładając z kolei $x_0, x_{-1} = 0$ z (7) dla $i = 0$ otrzymamy $x_1 = Bu_0 \in \Re_+^N$ i z (6b) mamy $y_0 = Du_0 \in \Re_+^p$, co implikuje $B \in \Re_+^{N \times m}$ i $D \in \Re_+^{p \times m}$, gdyż $u_0 \in \Re_+^m$ może być dowolne.

■

4. OSIĄGALNOŚĆ DODATNIEGO UKŁADU UŁAMKOWEGO RZĘDU

Niech e_i, $i = 1,2,\ldots,N$, będzie i-tą kolumna macierzy jednostkowej I. Kolumnę ae_i dla $a > 0$ nazywamy kolumną monomialną.

Uwzględniając prace [1, 4, 11] możemy sformułować podaną poniżej definicję osiągalności dodatniego dyskretnego układu ułamkowego z opóźnieniem.

Definicja 2. Układ ułamkowy (4) nazywamy osiągalnym, jeżeli dla każdego stanu $x_f \in \Re_+^N$ istnieje taka liczba naturalna q i ciąg wymuszeń $u_i \in \Re_+^m$ dla $i = 0,1,2,...q-1$, który przeprowadza układ (4) z zerowego stanu początkowego (5) (tj. $x_{-1} = x_0 = 0$) do zadanego stanu końcowego $x_f \in \Re_+^N$.

Twierdzenie 3. Dodatni układ dyskretny ułamkowego rzędu (4), dla $0 < n \le 1$, jest osiągalny w q krokach wtedy i tylko wtedy, gdy macierz osiągalności

$$R_q := [B, \Phi_1 B, ..., \Phi_{q-1} B] \tag{25}$$

zawiera N liniowo niezależnych kolumn monomialnych.

Dowód. Rozwiązanie równania (6a) ma postać (10). Dla zerowych warunków początkowych $x_{-1} = x_0 = 0$ oraz $i = q$ mamy

$$x_f = x_q = \sum_{j=0}^{q-1} \Phi_{q-j-1} B u_j = R_q u_0^q, \tag{26}$$

gdzie macierz osiągalności ma postać (25), zaś ciąg wymuszeń

$$u_0^q = \begin{bmatrix} u_{q-1} \\ u_{q-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Z definicji 2 i (26) wynika, że dla dowolnego stanu $x_f \in \Re_+^N$ istnieje ciąg nieujemnych sterowań $u_i \in \Re_+^m$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz R_q (25) zawiera N liniowo niezależnych kolumn monomialnych. ■

Jeżeli jest spełnione twierdzenie 2, to ciąg nieujemnych wymuszeń u_0^q (27), który przeprowadza układ (4) z zerowego stanu początkowego (5) (tj. $x_{-1} = x_0 = 0$) do zadanego stanu końcowego $x_f \in \Re_+^N$ można wyznaczyć ze wzoru [1]

$$u_0^q = R_q^{\mathrm{T}}[R_q R_q^{\mathrm{T}}]^{-1} x_f. \tag{28}$$

5. STEROWALNOŚĆ DODATNIEGO UKŁADU UŁAMKOWEGO RZĘDU

W oparciu o prace [4, 9, 11] możemy sformułować podaną poniżej definicję sterowalności do zera dodatniego dyskretnego układu ułamkowego z opóźnieniem.

Definicja 3. Układ ułamkowy (4) nazywamy sterowalnym do zera, jeżeli dla dowolnego niezerowego stanu początkowego $x_{-1}, x_0 \in\in \Re_+^n$ oraz stanu końcowego $x_f = 0$, istnieją: liczba naturalna $q > 0$ i ciąg sterowań $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,\dots,q-1$, takie, że układ (4) jest sterowalny do zera w q krokach.

Twierdzenie 4. Dodatni układ dyskretny ułamkowego rzędu (4), dla $0 < n \le 1$, jest sterowalny do zera w q krokach wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Phi_q = 0, \ \Phi_{q-1}(A_1 + \omega_2 I) = 0. \tag{29}$$

Ponadto $u_i = 0$ dla $i = 0,1,\dots,q-1$.

Dowód. Rozwiązanie równania (6a) ma postać (10). Dla zerowego stanu końcowego $x_f = 0$ oraz $i = q$ możemy napisać

$$0 = \Phi_q x_0 + \Phi_{q-1}(A_1 + \omega_2 I)x_{-1} + R_q u_0^q, \tag{30}$$

gdzie R_q ma postać (25), zaś u_0^q (27).

Dla skończonego q oraz $A_1 + \omega_2 I \in \Re_+^{N\times N}$, $\Phi(i) \in \Re_+^{N\times N}$, $x_{-1}, x_0 \in \Re_+^n$ i $R_q \in \Re_+^{N\times qm}$ nie istnieje dodatnie $u_0^q \in \Re_+^{qm}$ spełniające równanie (30).

Dla $u_0^q = 0$ i $R_q \in \Re_+^{N\times qm}$ oraz dowolnych niezerowych warunków początkowych (5) równość (30) może być spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą zależności (29). ■

Lemat 3. Dodatni układu dyskretny ułamkowego rzędu z opóźnieniem od stanu (4), przy $0 < n \le 1$, jest sterowalny do zera:

a) w $q = 1$ kroku wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_0 + nI = 0, \ A_1 + \omega_2 I = 0, \tag{31}$$

b) w $q = 2$ krokach wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(A_0 + nI)^2 = 0, \ A_1 + \omega_2 I = 0, \tag{32}$$

c) w nieskończenie wielu krokach wtedy i tylko wtedy, gdy jest stabilny asymptotycznie.

Dowód. Obliczając kolejne macierze podstawowe Φ_i dla $i = 1,2,\ldots$ z zależności (11), dostaniemy:

$$\begin{gathered}\Phi_1 = A_0 + nI,\\ \Phi_2 = \Phi_1^2 + (A_1 + \omega_2 I)\Phi_0,\\ \Phi_3 = \Phi_1^3 + \Phi_1(A_1 + \omega_2 I) + (A_1 + \omega_2 I)\Phi_1 + \omega_3\Phi_0, \qquad (33)\\ \Phi_4 = \Phi_1^4 + \Phi_1^2(A_1 + \omega_2 I) + \Phi_1(A_1 + \omega_2 I)\Phi_1 + (A_1 + \omega_2 I)\Phi_1^2 + (A_1 + \omega_2 I)^2 + 2\omega_3\Phi_1 + \omega_4\Phi_0,\\ \vdots\\ \Phi_q = \Phi_1^q + \Phi_1^{q-2}(A_1 + \omega_2 I) + \ldots + \omega_q\Phi_0.\end{gathered}$$

Z powyższego wynika, że warunki (29) będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą zależności (31) i $q = 1$.

W przypadku b macierz $A_0 + nI$ jest macierzą nilpotentną z indeksem nilpotentności $\mu = 2$ i macierz podstawowa $\Phi_2 = \Phi_1^2 + (A_1 + \omega_2 I)\Phi_0 = 0.$ Zatem warunki (29) będą spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą zależności (32) i $q = 2$.

W przypadku c dla $u_0^q = 0$ równanie (30) może być spełnione tylko wtedy, gdy

$$\lim_{q\to\infty}\Phi_q x_0 = 0 \ \text{ i } \ \lim_{q\to\infty}\Phi_{q-1}(A_1 + \omega_2 I)x_{-1} = 0 \qquad (34)$$

dla każdych $x_{-1}, x_0 \in \Re_+^n$, a więc gdy układ jest stabilny asymptotycznie (tj. $\Phi_q \to 0$, gdy $q \to \infty$ i $\omega_q \to 0$). ■

4. PRZYKŁAD

Zbadać osiągalność i sterowalność do zera dodatniego układu ułamkowego rzędu z opóźnieniem (4) o macierzach

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/10 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} -1/8 & 0 \\ 0 & -1/8 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (35)$$

Najpierw sprawdzimy dla jakich wartości ułamkowego rzędu n układ ten jest dodatni.

Z twierdzenia 2 mamy

$$A_0 + In = \begin{bmatrix} -1/2+n & 3/10 \\ 0 & -1/2+n \end{bmatrix} \in \Re_+^{2\times 2},\ A_1 + \omega_2 I = \begin{bmatrix} -1/8+\omega_2 & 0 \\ 0 & -1/8+\omega_2 \end{bmatrix} \in \Re_+^{N\times N}, \ (36)$$

wtedy i tylko wtedy gdy $n = 1/2$, ponieważ $\omega_2 = -\omega_2^{(n)} = \dfrac{(1-n)n}{2} \geq 1/8.$

Obliczając macierz osiągalności (25) przy $q = 2$ otrzymamy

$$R_2 = [B, \Phi_1 B] = \begin{bmatrix} 0 & 3/10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (37)$$

Macierz (37) ma 2 liniowo niezależne monomialne kolumny. Zatem dodatni układ ułamkowy o macierzach (35) jest osiągalny w 2 krokach dla rzędu ułamkowego $n = 1/2$.

Obliczając u_0^2 ze wzoru (28) dla stanu końcowego $x_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, dostaniemy

$$u_0^2 = R_2^{\mathrm{T}}[R_2 R_2^{\mathrm{T}}]^{-1} x_f = \begin{bmatrix} 0 & 3/10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10/3 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

W celu sprawdzenia otrzymanych wyników wyznaczymy rozwiązanie równania (4a) o macierzach (35) przy $n = 1/2$, $x_{-1} = x_0 = 0$ oraz $u_0 = 10/3$ i $u_1 = 2$.

Ze wzoru (7) dla $i = 0{,}1$ odpowiednio otrzymamy

$$x_1 = Bu_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10/3 \end{bmatrix}, \ x_2 = (A_0 + nI)x_1 + Bu_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Następnie zbadamy sterowalność do zera dodatniego układu ułamkowego przy $n = 1/2$.

Obliczając kolejne macierze podstawowe Φ_i dla $i = 1,2,\ldots$ z zależności (11) dostaniemy:

$$\begin{gathered}
\Phi_1 = A_0 + nI = \begin{bmatrix} 0 & 3/10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\Phi_2 = \Phi_1^2 + (A_1 + \omega_2 I)\Phi_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\Phi_3 = \omega_3 \Phi_0 = \begin{bmatrix} 1/16 & 0 \\ 0 & 1/16 \end{bmatrix}, \\
\Phi_4 = 2\omega_3 \Phi_1 + \omega_4 \Phi_0 = \begin{bmatrix} 5/128 & 3/80 \\ 0 & 5/128 \end{bmatrix} \\
\vdots
\end{gathered} \tag{40}$$

Z powyższego wynika, że punkt b lematu 3 jest spełniony. Dodatni układ ułamkowy (4) o macierzach (35), przy $n = 1/2$, jest sterowalny do zera w 2 krokach.

W celu sprawdzenia otrzymanych wyników wyznaczymy rozwiązanie równania (4a) o macierzach (35) przy $n = 1/2$, $x_{-1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ oraz $u_0 = 0$ i $u_1 = 0$.

Ze wzoru (7) dla $i = 0{,}1$ odpowiednio otrzymamy

$$x_1 = (A_0 + nI)x_0 + (A_1 + \omega_2 I)x_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3/10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/10 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$x_2 = (A_0 + nI)x_1 + (A_1 + \omega_2 I)x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 3/10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem osiągalności i sterowalności do zera dodatniego układu dyskretnego ułamkowego rzędu z opóźnieniem. Podano podstawowe definicje oraz warunki, jakie muszą spełniać macierze występujące w równaniach stanu ułamkowego rzędu, aby układ był dodatni.

Podano kryteria osiągalności układu oraz metodę wyznaczania sterowania przeprowadzającego rozpatrywane układy z zerowego stanu początkowego do dowolnego zadanego nieujemnego stanu końcowego. Podano też warunki sterowalności do zera dodatnich układów ułamkowych z opóźnieniem.

Powyższe rozważania można łatwo uogólnić na przypadek dodatniego ułamkowego układu dyskretnego z wieloma opóźnieniami od stanu, jak i sterowania.

LITERATURA

1. Busłowicz M., Kaczorek T.: Reachability and minimum energy control of positive discrete-time linear systems with multiple delays in state and control. 44th IEEE CDC-ECC'05, 2005, Sevilla, Spain.
2. Busłowicz M.: Explicit solution of discrete-delay equations, *Foundations of Control Engineering*, vol. **7**, No. 2, 1982, 67-71.
3. Kaczorek T.: Positive 1D and 2D Systems. Springer-Verlag, London, 2002.
4. Kaczorek T.: Reachability and controllability to zero of positive fractional discrete-time systems. *Machine Intelligence and Robotic Control*, vol. **6**, no. 4, 2007.
5. Lazarevic M. P.: Finite time stability analysis of PD fractional control of robotic time-delay systems. *Mechanics Research Communications 33*, 2006, 269-279.
6. Matignon D., d'Andre´a-Novel B.: Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems, Proceedings of the Computational Engineering in Systems and Application, France, vol. 2, IMACS, IEEE-SMC, 1996, 952–956.
7. Miller K. S., Ross B.: An Introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Willey, New York, 1993.
8. Podlubny I.: Matrix approach to discrete fractional calculus. *An International Journal for Theory and Applications*, vol. 3, No 4, 2000, 359-386.
9. Trzasko W., Kociszewski R.: Sterowalność dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniem od stanu i sterowania. Mat. XV Krajowej Konferencji Automatyki, Warszawa, 2005, T. 2, 127-130.
10. Zhang X.: Some results of linear fractional order time-delay system. Appl. Math. Comput., 2007 (in press).
11. Xie G., Wang L.: Reachability and controllability of positive linear discrete-time systems with time-delays. In: Positive Systems (Benvenuti, De Santis and Farina (Eds.), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2003, 377-384.
12. Blas M. Vinagre: Fractional Calculus Fundamentals. Tutorial Workshop #2. Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics, 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, 2002.