prof. dr hab. inż. Tadeusz Kaczorek
mgr inż. Łukasz Sajewski
Politechnika Białostocka

WYZNACZANIE DODATNIEJ REALIZACJI DLA SINGULARNYCH LINIOWYCH UKŁADÓW HYBRYDOWYCH

Sformułowano problem realizacji dodatniej dla singularnych hybrydowych układów dwuwymiarowych liniowych oraz zaproponowano metodę wyznaczania realizacji dodatniej dla danej transmitancji niewłaściwej na podstawie schematu zmiennych stanu. Ponadto przedstawiono warunki wystarczające na istnienie realizacji dodatniej dla danej transmitancji niewłaściwej. Podano również procedurę wyznaczania realizacji dodatniej, którą zilustrowano przykładem numerycznym.

COMPUTATION OF POSITIVE REALIZATIONS OF SINGULAR HYBRID LINEAR SYSTEMS

The realization problem for 2D positive singular linear hybrid systems is formulated and a method based on the state variable diagram for finding a positive realization of a given improper transfer function is proposed. Sufficient conditions for the existence of a positive realization of a given improper transfer function are established. A procedure for computation of a positive realization is proposed and illustrated by a numerical example.

1. WSTĘP

W układach dodatnich wymuszenia, zmienne stanów oraz odpowiedzi przyjmują tylko wartości nieujemne. Taka sytuacja jest spotykana w wielu dziedzinach techniki, biologii, ekonomi, medycyny, itp. Przykładem mogą być wymienniki ciepła, kolumny destylacyjne, modele populacji, modele epidemiologiczne, modele zanieczyszczenia środowiska. Ze względu na podane ograniczenia, w odróżnieniu od układów standardowych, teoria układów dodatnich opiera się na przestrzeniach stożków. Teoria takich układów jest trudniejsza i mniej zaawansowana. Literatura dotycząca układów dodatnich jest dość bogata [2, 9]. Problem realizacji dla ciągłych i dyskretnych układów dodatnich z opóźnieniami jak i bez opóźnień był rozpatrywany w pracach [1, 2, 9-14]. Osiągalność, sterowalność i sterowanie z minimalną energią dla linowych dyskretnych układów dodatnich z opóźnieniami były rozpatrywane w pracy [3]. Relatywna sterowalność stacjonarnych układów hybrydowych były analizowane w pracy [20], natomiast obserwowalność liniowych układów różniczkowo-algebraicznych z opóźnieniami była analizowana w pracy [21]. Nowa klasa dwuwymiarowych liniowych hybrydowych układów dodatnich została zaproponowana w pracy [14]. Problem realizacji dodatniej dla tej klasy układów został rozpatrzony w pracy [6, 15] oraz dla klasy układów z opóźnieniami w publikacjach [5, 7].

Głównym celem niniejszej pracy jest podanie nowej metody rozwiązania zadania realizacji dodatniej dla singularnych hybrydowych dwuwymiarowych układów liniowych na podstawie danej transmitancji niewłaściwej. Zostaną podane warunki wystarczające istnienia realizacji dodatniej dla danej transmitancji niewłaściwej oraz zostanie podane procedura wyznaczania tej realizacji. Procedura ta zostanie zilustrowana przykładem numerycznym.

2. INFORMACJE PODSTAWOWE I SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Rozważmy singularny układ hybrydowy opisany równaniami

$$\begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t,i) \\ x_2(t,i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t,i) \\ x_2(t,i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t,i) \tag{1a}$$

$$y(t,i) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t,i) \\ x_2(t,i) \end{bmatrix} \tag{1b}$$

gdzie $t \in R_+ = [0,+\infty]$, $i \in Z_+$, $\dot{x}_1(t,i) = \dfrac{\partial x_1(t,i)}{\partial t}$, $x_1(t,i) \in R^{n_1}$, $x_2(t,i) \in R^{n_2}$, $u(t,i) \in R^m$, $y(t,i) \in R^p$ oraz E, A, B, C są macierzami rzeczywistymi o odpowiednich wymiarach. W przypadku układu singularnego zakłada się, że $\det\begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} = 0$ oraz że pęk spełnia warunek regularności $\det\left[\begin{bmatrix} E_1 s & 0 \\ 0 & E_2 z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right] \neq 0$.

Warunki początkowe dla (1a) mają postać

$$x_1(0,i) = x_1(i),\ i \in Z_+ \ \text{ i } \ x_2(t,0) = x_2(t),\ t \in R_+ \tag{2}$$

Zauważmy, że układ hybrydowy (1) ma podobną strukturę do modelu Roessera [5, 14, 17].

Niech $R_+^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy rzeczywistych o wymiarach $n \times m$ z nieujemnymi elementami oraz $R_+^n = R_+^{n\times 1}$.

Definicja 1. Singularny układ hybrydowy (1) jest nazywany (wewnętrznie) dodatnim, gdy $x_1(t,i) \in R_+^{n_1}$, $x_2(t,i) \in R_+^{n_2}$ i $y(t,i) \in R_+^p$, $t \in R_+$, $i \in Z_+$ dla dowolnych warunków początkowych $x_1(i) \in R_+^{n_1}$, $i \in Z_+$, $x_2(t) \in R_+^{n_2}$, $t \in R_+$ oraz wszystkich wymuszeń $u(t,i) \in R_+^m$, $t \in R_+$, $i \in Z_+$.

Transmitancja układu (1) jest dana zależnością

$$T(s,z) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1 s - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & E_2 z - A_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Definicja 2. Macierze $E_1, E_2, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2, C_1, C_2$ są nazywane realizacją dodatnią danej transmitancji niewłaściwej, jeśli spełniają równanie (3).

Problem realizacji można sformułować następująco.

Dana jest niewłaściwa transmitancja $T(s,z) \in R^{p\times m}(s,z)$, należy wyznaczyć jej realizację dodatnią E, A, B, C.

3. ROZWIĄZANIE ZADANIA

Najpierw istotę proponowanej metody objaśnimy na przykładzie następującej transmitancji układu singularnego

$$T(s,z) = \frac{b_{22}s^2z^2 + b_{21}s^2z + b_{12}sz^2 + b_{20}s^2 + b_{02}z^2 + b_{11}sz + b_{10}s + b_{01}z + b_{00}}{sz + a_{10}s + a_{01}z + a_{00}} \tag{4}$$

Podana transmitancja jest niewłaściwa, gdyż stopień licznika jest wyższy od stopnia mianownika. Mnożąc licznik i mianownik tej transmitancji przez $s^{-2}z^{-2}$ otrzymamy

$$T(s,z) = \frac{b_{22} + b_{21}z^{-1} + b_{12}s^{-1} + b_{20}z^{-2} + b_{02}s^{-2} + b_{11}s^{-1}z^{-1} + b_{10}s^{-1}z^{-2} + b_{01}s^{-2}z^{-1} + b_{00}s^{-2}z^{-2}}{s^{-1}z^{-1} + a_{10}s^{-1}z^{-2} + a_{01}s^{-2}z^{-1} + a_{00}s^{-2}z^{-2}} = \frac{Y}{U} \tag{5}$$

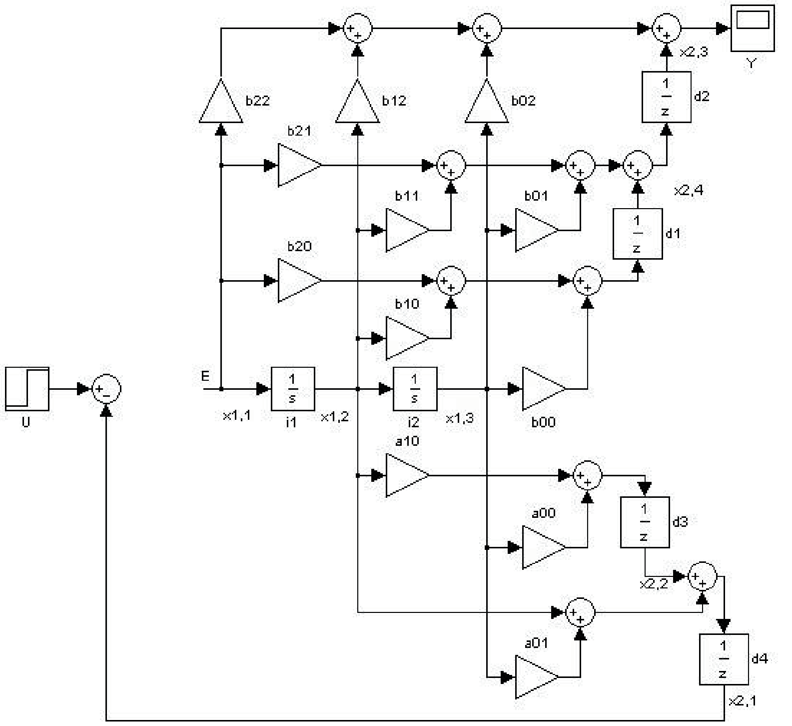
Definiując

$$E = \frac{U}{s^{-1}z^{-1} + a_{10}s^{-1}z^{-2} + a_{01}s^{-2}z^{-1} + a_{00}s^{-2}z^{-2}} \tag{6}$$

z (5) i (6) otrzymamy

$$\begin{aligned} &U - (s^{-1}z^{-1} + a_{10}s^{-1}z^{-2} + a_{01}s^{-2}z^{-1} + a_{00}s^{-2}z^{-2})E = 0 \\ &Y = (b_{22} + b_{21}z^{-1} + b_{12}s^{-1} + b_{20}z^{-2} + b_{02}s^{-2} + b_{11}s^{-1}z^{-1} + b_{10}s^{-1}z^{-2} + b_{01}s^{-2}z^{-1} + b_{00}s^{-2}z^{-2})E \end{aligned} \tag{7}$$

Na podstawie zależności (7) rysujemy schemat zmiennych stanu przedstawiony na rysunku 1.



Rys. 1.

Za zmienne stanu wybieramy wielkości wyjściowe członów całkujących ($x_{1,2}(t,i),\ \ x_{1,3}(t,i)$) i opóźniających ($x_{2,1}(t,i),\ \ x_{2,2}(t,i),\ \ x_{2,3}(t,i),\ \ x_{2,4}(t,i)$). Jako że jest to układ singularny, konieczne jest obranie jeszcze jednej zmiennej stanu oznaczonej jako $x_{1,1}(t,i)$. Na podstawie schematu zmiennych stanu (rys. 1.) wypisujemy następujące równania

$$
\begin{aligned}
&0 = -x_{21}(t,i) + u(t,i)\\
&\dot{x}_{12}(t,i) = x_{11}(t,i)\\
&\dot{x}_{13}(t,i) = x_{12}(t,i)\\
&x_{21}(t,i+1) = a_{01}x_{13}(t,i) + x_{12}(t,i) + x_{22}(t,i)\\
&x_{22}(t,i+1) = a_{00}x_{13}(t,i) + a_{10}x_{12}(t,i)\\
&x_{23}(t,i+1) = b_{01}x_{13}(t,i) + b_{11}x_{12}(t,i) + b_{21}x_{11}(t,i) + x_{24}(t,i)\\
&x_{24}(t,i+1) = b_{00}x_{13}(t,i) + b_{10}x_{12}(t,i) + b_{20}x_{11}(t,i)\\
&y(t,i) = b_{02}x_{13}(t,i) + b_{12}x_{12}(t,i) + b_{22}x_{11}(t,i) + x_{23}(t,i)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Zgodnie z definicją 1 układ opisany równaniami (1) jest układem dodatnim, gdy w dowolnej chwili dla nieujemnych wymuszeń i warunków początkowych stan tego układu w każdej chwili jest nieujemny (wektory stanu $x_1(t,i),\ \ x_2(t,i)$) i odpowiedzi przyjmują wartości nieujemne.

Prawdziwe jest więc następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. Układ singularny o transmitancji (4) jest dodatni, gdy spełnione są dwa następujące warunki:

- wszystkie współczynniki licznika przyjmują wartości nieujemne,
- wszystkie współczynniki mianownika przyjmują wartości nieujemne.

Zapisując równania (8) w postaci macierzowej otrzymamy:

$$
\begin{gathered}
\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\dot{x}_{11}(t,i)\\ \dot{x}_{12}(t,i)\\ \dot{x}_{13}(t,i)\\ x_{21}(t,i+1)\\ x_{22}(t,i+1)\\ x_{23}(t,i+1)\\ x_{24}(t,i+1)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0&0&0&-1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0\\
0&1&a_{01}&0&0&0&0\\
0&a_{10}&a_{00}&0&0&0&0\\
b_{21}&b_{11}&b_{01}&0&0&0&1\\
b_{20}&b_{10}&b_{00}&0&0&0&0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_{11}(t,i)\\ x_{12}(t,i)\\ x_{13}(t,i)\\ x_{21}(t,i)\\ x_{22}(t,i)\\ x_{23}(t,i)\\ x_{24}(t,i)
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
1\\0\\0\\0\\0\\0\\0
\end{bmatrix}
u(t,i)
\\
y(t,i) = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{12} & b_{02} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_{11}(t,i)\\ x_{12}(t,i)\\ x_{13}(t,i)\\ x_{21}(t,i)\\ x_{22}(t,i)\\ x_{23}(t,i)\\ x_{24}(t,i)
\end{bmatrix}
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Przy spełnieniu warunków twierdzenia 1, dodatnią realizacją transmitancji (4) singularnego układu hybrydowego (1) są macierze:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{10} & a_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{11} & b_{01} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_{20} & b_{10} & b_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$
$$C = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{12} & b_{02} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Uogólnimy powyższy przykład na dowolną transmitancję o postaci

$$T(s,z) = \frac{\sum_{i=0}^{q_1} \sum_{j=0}^{q_2} b_{i,j} s^i z^j}{s^{n_1} z^{n_2} + \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i+j \neq n_1+n_2}}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} a_{i,j} s^i z^j \right)} \tag{11}$$

gdzie $r_1 = q_1 - n_1 > 0$, $r_2 = q_2 - n_2 > 0$.

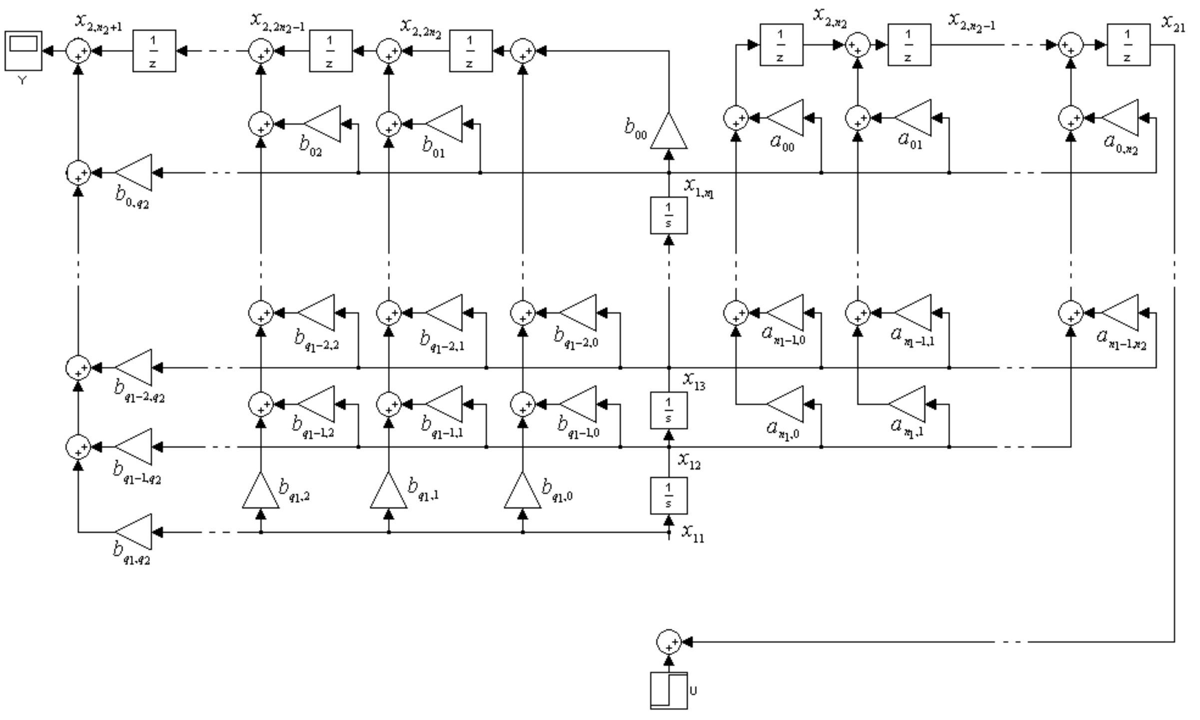
Mnożąc licznik i mianownik tej transmitancji przez $s^{-q_1} z^{-q_2}$ otrzymamy

$$T(s,z) = \frac{b_{q_1,q_2} + b_{q_1-1,q_2} s^{-1} + b_{q_1,q_2-1} z^{-1} + \ldots + b_{00} s^{-q_1} z^{-q_2}}{s^{-r_1} z^{-r_2} + a_{n_1,n_2-1} s^{-r_1} z^{-(r_2+1)} + a_{n_1-1,n_2} s^{-(r_1+1)} z^{r_2} + \ldots + a_{00} s^{-q_1} z^{-q_2}} = \frac{Y}{U} \tag{12}$$

Definiujemy

$$\begin{aligned} & U - (s^{-r_1} z^{-r_2} + a_{n_1,n_2-1} s^{-r_1} z^{-(r_2+1)} + a_{n_1-1,n_2} s^{-(r_1+1)} z^{r_2} + \ldots + a_{00} s^{-q_1} z^{-q_2}) E = 0 \\ & Y = (b_{q_1,q_2} + b_{q_1-1,q_2} s^{-1} + b_{q_1,q_2-1} z^{-1} + \ldots + b_{00} s^{-q_1} z^{-q_2}) E \end{aligned} \tag{13}$$

Schemat zmiennych stanu w tym przypadku ma postać jak na rysunku 2.



Rys. 2.

Za zmienne stanu wybieramy wielkości wyjściowe członów całkujących ($x_{1,1}(t,i),\ x_{1,2}(t,i),\ \ldots\ ,x_{1,n_1+1}(t,i)$) i opóźniających ($x_{2,1}(t,i),\ x_{2,2}(t,i),\ \ldots,\ x_{2,2n_2}(t,i)$).

Na podstawie schematu zmiennych stanu (rys. 2.) wypisujemy następujące równania różniczkowe i różnicowe

$$
\begin{aligned}
&0 = -x_{21}(t,i) + u(t,i)\\
&\dot{x}_{12}(t,i) = x_{11}(t,i)\\
&\dot{x}_{13}(t,i) = x_{12}(t,i)\\
&\vdots\\
&\dot{x}_{1,n_1+1}(t,i) = x_{1,n_1}(t,i)\\
&x_{21}(t,i+1) = x_{12}(t,i) + a_{n_1-1,n_2}x_{13}(t,i) + \ldots + a_{0,n_2}x_{1,n_1+1}(t,i) + x_{22}(t,i)\\
&x_{22}(t,i+1) = a_{n_1,n_2-1}x_{12}(t,i) + a_{n_1-1,n_2-1}x_{13}(t,i) + \ldots + a_{0,n_2-1}x_{1,n_1+1}(t,i) + x_{23}(t,i)\\
&\vdots\\
&x_{2,n_2-1}(t,i+1) = a_{n_1,1}x_{12}(t,i) + a_{n_1-1,1}x_{13}(t,i) + \ldots + a_{01}x_{1,n_1+1}(t,i) + x_{2,n_2}(t,i)\\
&x_{2,n_2}(t,i+1) = a_{n_1,0}x_{12}(t,i) + a_{n_1-1,0}x_{13}(t,i) + \ldots + a_{00}x_{1,n_1+1}(t,i)\\
&x_{2,n_2+1}(t,i+1) = b_{q_1,q_2-1}x_{11}(t,i) + b_{q_1-1,q_2-1}x_{12}(t,i) + \ldots + b_{0,q_2-1}x_{1,n_1+1}(t,i) + x_{2,n_2+2}(t,i)\\
&\vdots\\
&x_{2,2n_2-1}(t,i+1) = b_{q_1,1}x_{11}(t,i) + b_{q_1-1,1}x_{12}(t,i) + \ldots + b_{01}x_{1,n_1+1}(t,i) + x_{2,2n_2}(t,i)\\
&x_{2,2n_2}(t,i+1) = b_{q_1,0}x_{11}(t,i) + b_{q_1-1,0}x_{12}(t,i) + \ldots + b_{00}x_{1,n_1+1}(t,i)\\
&y(t,i) = b_{q_1,q_2}x_{11}(t,i) + b_{q_1-1,q_2}x_{12}(t,i) + \ldots + b_{0,q_2}x_{1,n_1+1}(t,i) + x_{2,n_2+1}(t,i)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Definiując wektory

$$x_1(t,i) = \begin{bmatrix} x_{1,1}(t,i) \\ \vdots \\ x_{1,n_1+1}(t,i) \end{bmatrix}, \quad x_2(t,i) = \begin{bmatrix} x_{2,1}(t,i) \\ \vdots \\ x_{2,2n_2}(t,i) \end{bmatrix} \tag{15}$$

równania (16) możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t,i) \\ x_2(t,i+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t,i) \\ x_2(t,i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t,i) \\ y(t,i) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t,i) \\ x_2(t,i) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

gdzie

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n_1} \end{bmatrix} \in R^{(n_1+1)\times(n_1+1)}, \quad E_2 = I_{2n_2},$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in R^{(n_1+1)\times(n_1+1)}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in R^{(n_1+1)\times 2n_2}, \tag{17}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} A_{211} \\ A_{212} \end{bmatrix} \in R^{2n_2\times(n_1+1)}, A_{211} = [0] \in R^{(r_2-1)\times(n_1+1)},$$

$$A_{212} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n_1-1,n_2} & \dots & a_{0,n_2} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n_1,n_2-1} & a_{n_1-1,n_2-1} & \dots & a_{0,n_2-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n_1,0} & a_{n_1-1,0} & \dots & a_{00} \\ b_{n_1+r_1,q_2-1} & \dots & b_{n_1,q_2-1} & b_{n_1-1,q_2-1} & b_{n_1-2,q_2-1} & \dots & b_{0,q_2-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n_1+r_1,0} & \dots & b_{n_1,0} & b_{q_1-1,0} & b_{q_1-2,0} & \dots & b_{00} \end{bmatrix} \in R^{(2q_2-3r_2+1)\times(n_1+1)},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_2-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_2-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R^{2n_2\times 2n_2}, \tag{17}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{n_1+1}, \quad B_2 = [0] \in R^{2n_2}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} b_{q_1,q_2} & \dots & b_{0,q_2} \end{bmatrix} \in R^{1\times(n_1+1)}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \in R^{1\times 2n_2},$$

$$C_{21} = [0] \in R^{1\times n_2}, \quad C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in R^{1\times n_2}$$

Zostało więc udowodnione następujące twierdzenie

Twierdzenie 2. Realizacja dodatnia układu hybrydowego o danej transmitancji niewłaściwej (11) istnieje wtedy, gdy wszystkie współczynniki tej transmitancji są nieujemne.

Jeżeli spełnione jest twierdzenie 2 to realizacja dodatnia dla danej transmitancji niewłaściwej układu hybrydowego można wyznaczyć korzystając z następującej procedury:

Procedura.

Krok 1. Daną transmitancję o postaci (11) sprowadzamy do postaci (13) i wyznaczamy zależności (13),

Krok 2. Na podstawie równań (13) rysujemy schemat jak na rysunku 2,

Krok 3. Wybieramy zmienne stanu i wypisujemy równania (14),

Krok 4. Na podstawie równań (14) wyznaczamy poszukiwaną realizację transmitancji (11) o postaci (17).

4. PRZYKŁAD

Dana jest transmitancja niewłaściwa o postaci

$$T(s,z)=\frac{sz^2+2z^2+3sz+4s+5z+6}{sz+7s+8z+9} \tag{18}$$

należy wyznaczyć jej realizację dodatnią (17). W tym przypadku $r_1=q_1-n_1=0$ i $r_2=q_2-n_2=1$.

Stosując Procedurę otrzymamy

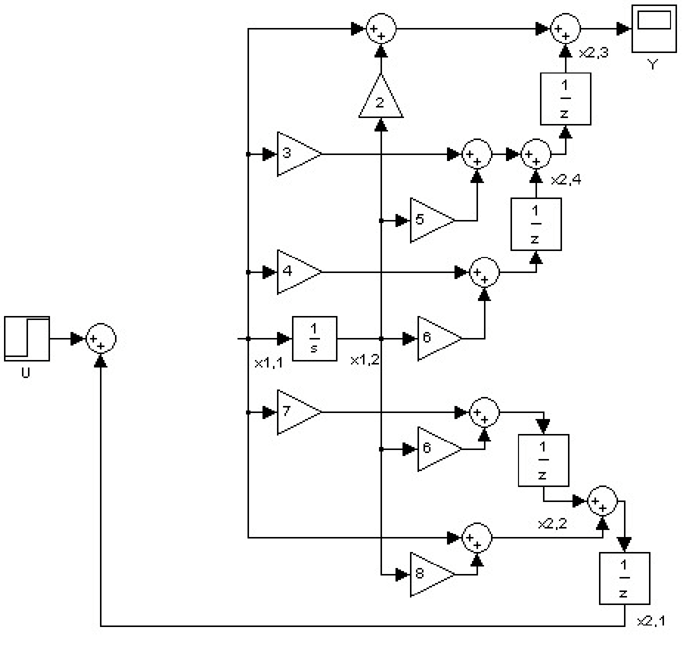
Krok 1. Mnożąc licznik i mianownik transmitancji (18) przez $s^{-1}z^{-2}$ otrzymamy

$$T(s,z)=\frac{1+2s^{-1}+3z^{-1}+4z^{-2}+5s^{-1}z^{-1}+6s^{-1}z^{-2}}{z^{-1}+7z^{-2}+8s^{-1}z^{-1}+9s^{-1}z^{-2}}=\frac{Y}{U} \tag{19}$$

oraz

$$\begin{aligned} &U-(z^{-1}+7z^{-2}+8s^{-1}z^{-1}+9s^{-1}z^{-2})E=0 \\ &Y=(1+2s^{-1}+3z^{-1}+4z^{-2}+5s^{-1}z^{-1}+6s^{-1}z^{-2})E \end{aligned} \tag{20}$$

Krok 2. Schemat zmiennych stanu ma postać jak na rys. 3



Rys. 3.

Krok 3. Na podstawie powyższego schematu (rys. 3) wypisujemy równania stanu

$$\begin{aligned}
&0 = -x_{21}(t,i) + u(t,i)\\
&\dot{x}_{12}(t,i) = x_{11}(t,i)\\
&x_{21}(t,i+1) = x_{11}(t,i) + 8x_{12}(t,i) + x_{22}(t,i)\\
&x_{22}(t,i+1) = 7x_{11}(t,i) + 9x_{12}(t,i)\\
&x_{23}(t,i+1) = 3x_{11}(t,i) + 5x_{12}(t,i) + x_{24}(t,i)\\
&x_{24}(t,i+1) = 4x_{11}(t,i) + 6x_{12}(t,i)\\
&y(t,i) = x_{11}(t,i) + 2x_{12}(t,i) + x_{23}(t,i)
\end{aligned} \tag{21}$$

Krok 4. Poszukiwana realizacja ma postać

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

5. PODSUMOWANIE

Podano nową metodę wyznaczania realizacji dodatniej singularnych hybrydowych dwuwymiarowych układów liniowych na podstawie danej transmitancji niewłaściwej. Sformułowane zostały warunki wystarczające istnienia dodatniej realizacji dla danej transmitancji niewłaściwej. Zaproponowano procedurę wyznaczania realizacji dodatniej oraz zilustrowano tę procedurę przykładem numerycznym. Problemem otwartym jest sformułowanie warunków koniecznych i wystarczających istnienia rozwiązania problemu realizacji dodatniej dla hybrydowych układów dwuwymiarowych.

LITERATURA

[1] L. Benvenuti and L. Farina: *A tutorial on the positive realization problem*, IEEE Trans. Autom. Control, vol. 49, No 5, 2004, pp. 651-664.

[2] L. Farina and S. Rinaldi: *Positive Linear Systems; Theory and Applications*, J. Wiley, New York, 2000.

[3] T. Kaczorek and M. Busłowicz: *Reachability and minimum energy control of positive linear discrete-time systems with one delay*, 12th Mediterranean Conference on Control and Automation, June 6-9, 2004, Kusadasi, Izmir, Turkey.

[4] T. Kaczorek and M. Busłowicz: *Minimal realization problem for positive multivariable linear systems with delay*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., Vol. 14, No. 2, 2004, pp. 181-187.

[5] T. Kaczorek and Ł. Sajewski: *Computation of positive realization of MIMO hybrid linear systems with delays using the state variable diagram method*, 16th International Conference on Systems Science, Wrocław 4 – 6 Wrzesień 2007, Vol. 1, 2007, pp. 150-160.

[6] T. Kaczorek and Ł. Sajewski: *Computation of positive realization of MIMO hybrid linear systems using the state variable diagram method*, Archives of Control Sciences – Vol. 17, 2007, No.1 pp. 5-21.

[7] T. Kaczorek and Ł. Sajewski: *Realization problem for positive 2D hybrid systems with one delay in state and input vectors*, 8th International Workshop „Computational Problems of Electrical Engineering”, Wilkasy 14 – 16 wrzesień 2007, Przegląd Elektrotechniczny – 2/2007, pp. 242-246.

[8] T. Kaczorek: *Some recent developments in positive systems*, Proc. 7th Conference of Dynamical Systems Theory and Applications, pp. 25-35, Łódź 2003.

[9] T. Kaczorek: *Positive 1D and 2D systems*, Springer Verlag, London 2002.

[10] T. Kaczorek: *A realization problem for positive continues-time linear systems with reduced numbers of delay*, Int. J. Appl. Math. Comp. Sci. 2006, Vol. 16, No. 3, pp. 325-331.

[11] T. Kaczorek: *Realization problem for positive multivariable discrete-time linear systems with delays in the state vector and inputs*, Int. J. Appl. Math. Comp. Sci. 2006, Vol. 16, No. 2, pp. 101-106.

[12] T. Kaczorek: *Realization problem for positive discrete-time systems with delay*, System Science, Vol. 30, No. 4, 2004, pp. 117-130.

[13] T. Kaczorek: *Positive minimal realizations for singular discrete-time systems with delays in state and delays in control*, Bull. Pol. Acad. Sci. Techn., Vol 53, No 3, 2005, pp. 293-298.

[14] T. Kaczorek: *Positive 2D hybrid linear systems*, Proc. Inter. Conf. Numerical Linear Algebra in Signals Systems and Control 2007.

[15] T. Kaczorek: *Realization problem for positive 2D hybrid systems*, Submitted to COMPEL.

[16] T. Kaczorek: *Two-Dimensional Linear Systems*, Springer Verlag, Berlin 1985.

[17] T. Kaczorek: *Determination of singular positive realization of improper transfer function of 2D linear systems*, SMC Zakopane 2007.

[18] J. Klamka: *Controllability of Dynamical Systems*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1991.

[19] J. Kurek: *The general state-space model for a two-dimensional linear digital system*, IEEE Trans. Austom. Contr. AC-30 , June 1985, pp. 600-602.

[20] V. M. Marchenko and O. N. Poddubnaya: *Relative controllability of stationary hybrid systems*, 10th IEEE Int. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics, 30 Aug. -2 Sept. 2004, Międzyzdroje, Poland pp. 267-272.

[21] V. M. Marchenko, O. N. Poddubnaya, Z. Zaczkiewicz: *On the observability of linear differential-algebraic systems with delays*, IEEE Trans. Autom. Contr. Vol. 51, No. 8, 2006, pp. 1387-1392.

[22] R. B. Roesser: *A discrete state-space model for linear image processing*, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-20, 1 (1975), pp. 1-10.