

dr inż. Piotr Marusak
Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej
Politechniki Warszawskiej

REGULATORY PREDYKCYJNE Z ZAŁOŻONĄ TRAJEKTORIĄ PRZYROSTÓW STEROWANIA I UWZGLĘDNIANIEM OGRANICZEŃ SYGNAŁU STERUJĄCEGO

W artykule zaproponowano nowe sformułowanie algorytmów predykcyjnych. W podejściu tym, zakłada się, że trajektoria przyszłych przyrostów sterowania jest opisana pewną z góry założoną funkcją. Dzięki doborowi różnych postaci tej funkcji, można zmieniać zachowanie układu regulacji. Zyskuje się więc kolejną, oprócz tradycyjnych, metodę strojenia algorytmów, a tym samym, większą swobodę wpływania na właściwości regulatora predykcyjnego. Ponadto, dzięki użyciu zaproponowanego podejścia, istnieje możliwość uwzględniania w algorytmie, w prosty sposób, ograniczeń nałożonych na sygnały sterujące. Warto też podkreślić, że w przypadku algorytmów w wersji analitycznej jest możliwe uwzględnianie ograniczeń na całym horyzoncie sterowania.

PREDICTIVE CONTROLLERS WITH PRESUMED TRAJECTORY OF CONTROL CHANGES AND EFFICIENT MECHANISM OF CONTROL SIGNAL CONSTRAINTS HANDLING

A new formulation of predictive control algorithms is proposed in the paper. The idea of the approach consists in assumption that future trajectory of changes of a control signal is presumed in advance. Thanks to such an approach it is easy to take control signal constraints into consideration. Moreover, in the case of analytical predictive controllers, it is possible to take these constraints into consideration on the entire control horizon. Except typically available methods of predictive algorithm tuning, in the case of those presented here, thanks to appropriate choice of a trajectory of future control signal changes, it is possible to influence behavior of the control system. Thus, a designer has more freedom to tune the control algorithm.

1. WSTĘP

W artykule zaprezentowano rozszerzenie standardowego algorytmu predykcyjnego. W niniejszej pracy założono, że przyszła trajektoria przyrostów sterowania jest z góry określona przez pewną funkcję. Dzięki takiemu postawieniu problemu, stosunkowo łatwe jest uwzględnianie ograniczeń nałożonych na sygnał sterujący, także w algorytmach w wersji analitycznej. Co więcej, w przeciwieństwie do przypadku standardowego algorytmu predykcyjnego w wersji analitycznej z przycinaniem ograniczeń (zob. np. [5, 6, 9]), w zaproponowanym algorytmie można uwzględniać ograniczenia sygnałów sterujących na całym horyzoncie sterowania.

W następnym rozdziale przypomniano sformułowanie standardowego algorytmu predykcyjnego bazującego na modelu w postaci równania różnicowego i założeniu modelu zakłóceń niemierzalnych typu DMC. W rozdz. 3 zaprezentowano rozszerzenie algorytmu polegające na zastosowaniu z góry założonej trajektorii przyszłych przyrostów sterowania. W kolejnym

Praca naukowa finansowana ze środków budżetowych na naukę

rozdziale, omówiono problem uwzględniania, w zaproponowanych algorytmach, ograniczeń nałożonych na sygnał sterujący. Rozdz. 5 zawiera opis eksperymentów, przeprowadzonych w układzie regulacji przykładowego obiektu z opóźnieniem i odpowiedzią odwrotną, ilustrujące zalety zaproponowanego podejścia. Artykuł kończy krótkie podsumowanie.

2. ALGORYTMY REGULACJI PREDYKCYJNEJ

W algorytmach predykcyjnych z przesuwającym horyzontem sygnał sterujący wyznacza się w taki sposób, aby przewidywane zachowanie układu regulacji w przyszłości spełniało założone kryteria. Najczęściej minimalizowany jest następujący wskaźnik jakości [1, 2, 3, 5, 9]:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} \left\{ J_{MPC} = \sum_{i=1}^p (\bar{y}_k - y_{k+i|k})^2 + \sum_{i=0}^{s-1} \lambda \cdot (\Delta u_{k+i|k})^2 \right\}, \quad (1)$$

gdzie \bar{y}_k jest wartością zadaną, $y_{k+i|k}$ jest przewidywaną, w bieżącej chwili k , wartością wyjścia obiektu dla przyszłej chwili $k+i$, $\Delta u_{k+i|k}$ jest przyszłym (szukanym) przyrostem sterowania, p jest horyzontem predykcji, $s \leq p$ jest horyzontem sterowania; $\lambda \geq 0$ jest współczynnikiem wazącym przyszłe przyrosty sterowania, $\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_{k|k}, \dots, \Delta u_{k+s-1|k}]^T$.

Przyszłe, przewidywane wartości wyjścia $y_{k+i|k}$ są wyznaczone na podstawie modelu obiektu regulacji. W przypadku wielu algorytmów predykcyjnych, jak np. GPC (Generalized Predictive Control), EPSAC (Extended Prediction Self Adaptive Control), EHAC (Extended Horizon Adaptive Control), do wyznaczania predykcji stosuje się model w postaci równania różnicowego, zob. np. [1, 2]. Model ten ma następującą postać:

$$\tilde{y}_k = b_1 \cdot y_{k-1} + b_2 \cdot y_{k-2} + \dots + b_n \cdot y_{k-n} + c_1 \cdot u_{k-1} + c_2 \cdot u_{k-2} + \dots + c_m \cdot u_{k-m}, \quad (2)$$

gdzie \tilde{y}_k jest wyjściem modelu obiektu, $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ są parametrami modelu obiektu, y_{k-i} jest wartością wyjścia w chwili $k-i$, u_{k-i} jest wartością sterowania w chwili $k-i$. Przewidywana, w chwili k , wartość wyjścia dla chwili $k+1$, jest więc opisana wzorem:

$$y_{k+1|k} = b_1 \cdot y_k + b_2 \cdot y_{k-1} + \dots + b_n \cdot y_{k-n+1} + c_1 \cdot u_k + c_2 \cdot u_{k-1} + \dots + c_m \cdot u_{k-m+1} + d_k, \quad (3)$$

gdzie $d_k = y_k - \tilde{y}_k$ jest zakłóceniem typu DMC (jest ono stałe na całym horyzoncie predykcji). Na podstawie (2) i (3) przewidywaną wartość wyjścia obiektu można zapisać jako:

$$y_{k+1|k} = (b_1 + 1) \cdot y_k + (b_2 - b_1) \cdot y_{k-1} + \dots + (b_n - b_{n-1}) \cdot y_{k-n+1} - b_n \cdot y_{k-n} + c_1 \cdot (u_k - u_{k-1}) + c_2 \cdot (u_{k-1} - u_{k-2}) + \dots + c_m \cdot (u_{k-m+1} - u_{k-m}). \quad (4)$$

Po skorzystaniu z zależności:

$$\Delta u_k = u_k - u_{k-1}, \quad (5)$$

Wzór (4) można zapisać w postaci:

$$y_{k+1|k} = \tilde{b}_1 \cdot y_k + \tilde{b}_2 \cdot y_{k-1} + \dots + \tilde{b}_n \cdot y_{k-n+1} + \tilde{b}_{n+1} \cdot y_{k-n} + c_1 \cdot \Delta u_k + c_2 \cdot \Delta u_{k-1} + \dots + c_m \cdot \Delta u_{k-m+1}, \quad (6)$$

gdzie $\tilde{b}_j = \begin{cases} b_1 + 1; & j = 1 \\ b_j - b_{j-1}; & j \geq 2, j \leq n \\ -b_n; & j = n + 1 \end{cases}$. Niestety, użycie wzoru (6) do predykcji wartości wyjścia

obiektu regulacji w chwilach dalszych niż $k+1$, sprawiłoby, że we wzorze pojawiłyby się składniki zależne od jeszcze nieznanymi, przyszłych wartości wyjścia obiektu. Jednak, jeśli skorzysta się ze wzoru (3) i odejmie stronami wzory dla chwili $k+2$ i chwili $k+1$, otrzyma się następujący wzór na wartość wyjścia przewidywaną dla chwili $k+2$ [4] (w dalszej części opisu przyjęto, oznaczenie $\Delta u_{k+i|k} = \Delta u_{k+i}$):

$$y_{k+2|k} = \tilde{b}_1 \cdot y_{k+1|k} + \tilde{b}_2 \cdot y_k + \dots + \tilde{b}_n \cdot y_{k-n+2} + \tilde{b}_{n+1} \cdot y_{k-n+1} + c_1 \cdot \Delta u_{k+1|k} + c_2 \cdot \Delta u_{k|k} + \dots + c_m \cdot \Delta u_{k-m+2}. \quad (7)$$

Po podstawieniu do równania (7) wartości wyjścia przewidywanej dla chwili $k+1$, a danej wzorem (6), otrzyma się:

$$y_{k+2|k} = \tilde{b}_1^1 \cdot y_k + \tilde{b}_2^1 \cdot y_{k-1} + \dots + \tilde{b}_n^1 \cdot y_{k-n+1} + \tilde{b}_{n+1}^1 \cdot y_{k-n} + c_1 \cdot \Delta u_{k+1|k} + c_1^1 \cdot \Delta u_{k|k} + \dots + c_{m-1}^1 \cdot \Delta u_{k-m+2} + c_m^1 \cdot \Delta u_{k-m+1}, \quad (8)$$

gdzie $\tilde{b}_j^1 = \begin{cases} \tilde{b}_1 \cdot \tilde{b}_j + \tilde{b}_{j+1}; & j \geq 1, j \leq n \\ \tilde{b}_1 \cdot \tilde{b}_j; & j = n + 1 \end{cases}$, $c_j^1 = \begin{cases} \tilde{b}_1 \cdot c_j + c_{j+1}; & j \geq 1, j \leq m - 1 \\ \tilde{b}_1 \cdot c_j; & j = m \end{cases}$.

Zależność (8) należy następnie przepisać dla kolejnej chwili a za wartość wyjścia w chwili $k+1$, podstawić znowu wzór (6). Procedurę tę należy powtórzyć dla dalszych chwil z horyzontu predykcji. W ten sposób można otrzymać ogólny wzór na przewidywane wartości wyjścia obiektu w przyszłych chwilach:

$$y_{k+i|k} = \tilde{b}_1^{i-1} \cdot y_k + \tilde{b}_2^{i-1} \cdot y_{k-1} + \dots + \tilde{b}_n^{i-1} \cdot y_{k-n+1} + \tilde{b}_{n+1}^{i-1} \cdot y_{k-n} + \sum_{l=0}^{i-1} c_1^l \cdot \Delta u_{k-l+i-1|k} + c_2^{i-1} \cdot \Delta u_{k-1} + \dots + c_{m-1}^{i-1} \cdot \Delta u_{k-m+2} + c_m^{i-1} \cdot \Delta u_{k-m+1}. \quad (9)$$

gdzie $\tilde{b}_j^i = \begin{cases} \tilde{b}_1^{i-1} \cdot \tilde{b}_j + \tilde{b}_{j+1}^{i-1}; & j \geq 1, j \leq n \\ \tilde{b}_1^{i-1} \cdot \tilde{b}_j; & j = n + 1 \end{cases}$, $c_j^i = \begin{cases} \tilde{b}_1^{i-1} \cdot c_j + c_{j+1}^{i-1}; & j \geq 1, j \leq m - 1 \\ \tilde{b}_1^{i-1} \cdot c_j; & j = m \end{cases}$, $i = 1, \dots, p$,

$\tilde{b}_j^0 = \tilde{b}_j$, $c_j^0 = c_j$. Dokładny opis przeprowadzania predykcji w powyższy sposób, zainteresowany czytelnik może znaleźć w [4]. Zauważmy, że we wzorze (9) jedynie pierwszy składnik z drugiej linii zależy od przyszłych przyrostów sterowania $\Delta u_{k+i|k}$.

2.1. Algorytm w wersji numerycznej

Wskaźnik jakości (1) może być minimalizowany numerycznie, w każdej iteracji algorytmu przy obecności ograniczeń nałożonych na przyszłe wartości: przyrostów sterowania, sterowania i wyjścia obiektu:

$$\Delta \mathbf{u}_{\min} \leq \Delta \mathbf{u} \leq \Delta \mathbf{u}_{\max}, \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad (11)$$

$$\mathbf{y}_{\min} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_{\max}, \quad (12)$$

gdzie, $\mathbf{u} = [u_{k|k}, \dots, u_{k+s-1|k}]^T$, $\mathbf{y} = [y_{k+1|k}, \dots, y_{k+p|k}]^T$, $\Delta \mathbf{u}_{min}$, $\Delta \mathbf{u}_{max}$, \mathbf{u}_{min} , \mathbf{u}_{max} , \mathbf{y}_{min} , \mathbf{y}_{max} są wektorami dolnych i górnych ograniczeń wartości odpowiednio: przyrostów sterowania, sterowania i wyjścia obiektu. W wyniku rozwiązania tak sformułowanego zadania optymalizacji, otrzymuje się wektor przyszłych zmian sterowania $\Delta \mathbf{u}$, z którego używany jest element $\Delta u_{k|k}$ a następnie optymalizacja jest powtarzana w kolejnej chwili próbkowania.

2.2. Algorytm w wersji analitycznej

Jeśli wskaźnik jakości (1) jest minimalizowany bez ograniczeń, można otrzymać prawo regulacji regulatora predykcyjnego. Ponieważ we wzorze (9) tylko jeden składnik (pierwszy z drugiej linii) zależy od przyszłych przyrostów sterowania, wektor zawierający przewidywane wartości wyjścia obiektu regulacji \mathbf{y} , można zapisać w następującej postaci:

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{u}, \tag{13}$$

gdzie $\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}_{k+1|k}, \dots, \tilde{y}_{k+p|k}]^T$ jest wektorem zwanym odpowiedzią swobodną obiektu, ponieważ opisuje wpływ jedynie przeszłych oddziaływań na obiekt. Poszczególne elementy odpowiedzi swobodnej są opisane wzorem:

$$\tilde{y}_{k+i|k} = \tilde{b}_1^{i-1} \cdot y_k + \tilde{b}_2^{i-1} \cdot y_{k-1} + \dots + \tilde{b}_{n+1}^{i-1} \cdot y_{k-n} + c_2^{i-1} \cdot \Delta u_{k-1} + \dots + c_m^{i-1} \cdot \Delta u_{k-m+1}, \tag{14}$$

ponadto

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_1^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1^1 & c_1^0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_1^{p-1} & c_1^{p-2} & \dots & c_1^{p-s+1} & c_1^{p-s} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Współczynniki c_l^l ; $l = 0, \dots, p-1$ są równe rzędnym odpowiedzi skokowej obiektu regulacji. Macierz \mathbf{A} jest więc macierzą dynamiczną taką samą, jak w algorytmie DMC.

Jeśli wskaźnik jakości (1) jest minimalizowany bez ograniczeń, wówczas rozwiązanie analityczne jest dane wzorem:

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \lambda \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}), \tag{16}$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową, $\bar{\mathbf{y}} = [\bar{y}_k, \dots, \bar{y}_k]^T$ jest wektorem o długości p . Z wektora przyszłych sterowań $\Delta \mathbf{u}$ jedynie pierwszy element jest używany do sterowania. Jego wartość jest dana zależnością:

$$\Delta u_{k|k} = \mathbf{K}_1 \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}), \tag{17}$$

gdzie \mathbf{K}_1 jest pierwszym wierszem macierzy $\mathbf{K} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \lambda \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T$. Wzór (17) można zapisać w następującej, równoważnej postaci:

$$\Delta u_{k|k} = r_e \cdot e_k + \sum_{j=1}^{m-1} r_u^j \cdot \Delta u_{k-j} + \sum_{j=1}^{n+1} r_y^j \cdot y_{k-j+1}, \tag{18}$$

gdzie $e_k = \bar{y}_k - y_k$ jest uchybem regulacji w bieżącej chwili próbkowania, $r_e, r_u^1, \dots, r_u^{m-1}, r_y^1, \dots, r_y^{n+1}$ są parametrami regulatora otrzymanymi po przekształceniu.

3. ALGORYTMY Z ZAŁOŻONĄ POSTACIĄ STEROWAŃ

Przedstawiony algorytm twórczo korzysta z idei wykorzystywanej w algorytmie Predictive Functional Control (PFC) [2, 7, 8], polegającej na założeniu, że trajektoria przyszłych sterowań jest opisana kombinacją z góry określonych funkcji. Idea ta została w artykule zaadaptowana do modyfikacji standardowego algorytmu predykcyjnego, sformułowanego w postaci przyrostowej. Nie są więc, w proponowanych regulatorach, używane inne mechanizmy stosowane w algorytmie PFC, jak np. punkty koincydencji (ang. coincidence points). W zaproponowanych algorytmach można jednak stosować długie horyzonty, horyzont sterowania, karę za zmienność sterowania, czyli wszystkie typowo dostępne parametry dostrajalne. Pomimo tego, jest możliwe sformułowanie prawa regulacji. Innymi słowy, zaproponowane algorytmy są pozbawione wielu wad algorytmu PFC wymienionych w [7], a w szczególności, choć nie jest to tematem niniejszego artykułu, mogą zostać w łatwy sposób (analogiczny do przedstawionego poniżej dla obiektów o jednym wejściu i jednym wyjściu), zastosowane w układach regulacji obiektów o wielu wejściach i wielu wyjściach.

W proponowanym algorytmie zakłada się, że trajektoria przyszłych przyrostów sterowania jest pewną z góry założoną funkcją zależną od czasu. W takim razie:

$$\Delta u_{k+j-1|k} = \alpha_k \cdot \Delta u_B(j), j = 1, \dots, s, \quad (19)$$

gdzie α_k jest wartością zmienianą w każdej chwili próbkowania przez regulator. Wektor przyszłych przyrostów sterowania będzie więc opisany zależnością:

$$\Delta \mathbf{u} = \alpha_k \cdot \mathbf{Z}, \quad (20)$$

gdzie $\mathbf{Z} = [\Delta u_B(1) \quad \Delta u_B(2) \quad \dots \quad \Delta u_B(s)]^T$. Po podstawieniu (20) do (13), otrzyma się:

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}} + \alpha_k \cdot \mathbf{B}, \quad (21)$$

gdzie $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}$. W takim przypadku, jeśli przeprowadzona zostanie optymalizacja bez ograniczeń, tzn. minimalizowany będzie wskaźnik jakości:

$$\min_{\alpha_k} \left\{ J_{MPC} = (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y})^T \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) + \lambda \cdot \Delta \mathbf{u}^T \cdot \Delta \mathbf{u} \right\}, \quad (22)$$

gdzie zgodnie z (20), $\Delta \mathbf{u}^T \cdot \Delta \mathbf{u} = (\alpha_k)^2 \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{Z}$; otrzyma się następujące rozwiązanie:

$$\alpha_k = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}), \quad (23)$$

gdzie $\mathbf{M} = \lambda (\mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{Z})$. W takim razie, przyszłe wartości sterowań będą opisane wzorem:

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}) \cdot \mathbf{Z}. \quad (24)$$

Ponieważ jedynie pierwsze z ciągu wyznaczonych sterowań jest używane, w takim razie:

$$\Delta u_{k|k} = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} + \mathbf{M})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot (\bar{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}) \cdot \Delta u_B(1). \quad (25)$$

Podobnie, jak w rozdz. 2.2, można otrzymać prawo regulacji zależne od przeszłych wartości wyjścia i sterowania.

Uwaga: Ponieważ w przypadku algorytmów predykcyjnych bazujących na innych modelach niż równanie różnicowe, zmianie ulega jedynie postać odpowiedzi swobodnej, więc podejście zaproponowane w artykule może zostać zastosowane bezpośrednio, także do modyfikacji innych odmian algorytmów predykcyjnych.

4. UWZGLĘDNIANIE OGRANICZEŃ SYGNAŁÓW STERUJĄCYCH

W przypadku istnienia w układzie regulacji ograniczeń nałożonych na wartości bądź przyrosty sterowania, ich zignorowanie zwykle wpływa negatywnie na jakość działania układu regulacji. W standardowych, analitycznych algorytmach predykcyjnych, można zastosować mechanizm przycinania sterowań. Mechanizm ten jest stosunkowo prosty i polega na odpowiednim modyfikowaniu przyrostów sterowań, według następujących reguł (zob. np. [5, 6, 9]):

dla przyrostów sterowania:

- jeśli $\Delta u_{k|k} < \Delta u_{\min}$, to $\Delta u_{k|k} = \Delta u_{\min}$,
- jeśli $\Delta u_{k|k} > \Delta u_{\max}$, to $\Delta u_{k|k} = \Delta u_{\max}$;

oraz dla wartości sterowania:

- jeśli $u_{k-1} + \Delta u_{k|k} < u_{\min}$, to $\Delta u_{k|k} = u_{\min} - u_{k-1}$,
- jeśli $u_{k-1} + \Delta u_{k|k} > u_{\max}$, to $\Delta u_{k|k} = u_{\max} - u_{k-1}$.

Mechanizm ten jest prosty w implementacji, jednak za jego pośrednictwem można wpływać tylko na pierwszą wartość z horyzontu sterowania.

W przypadku zaproponowanych algorytmów, nawet w wersji analitycznej jest możliwe uwzględnianie ograniczeń sygnału sterującego na całym horyzoncie sterowania. Zauważmy, bowiem, że

$$\Delta u_{k+j-1|k} = \alpha_k \cdot \Delta u_B(j), j = 1, \dots, s. \quad (26)$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\Delta u_B^{\max} = \max\{\Delta u_B(1), \dots, \Delta u_B(s)\} \quad (27)$$

$$\Delta u_B^{\min} = \min\{\Delta u_B(1), \dots, \Delta u_B(s)\} \quad (28)$$

W takim razie, w przypadku ograniczeń nałożonych na przyrosty sterowania (przy założeniu, że Δu_B^{\max} i Δu_B^{\min} są nieujemne), należy zastosować następujące reguły:

dla $\alpha_k > 0$:

- jeśli $\alpha_k \cdot \Delta u_B^{\min} < \Delta u_{\min}$, to $\alpha_k = \frac{\Delta u_{\min}}{\Delta u_B^{\min}}$,
- jeśli $\alpha_k \cdot \Delta u_B^{\max} > \Delta u_{\max}$, to $\alpha_k = \frac{\Delta u_{\max}}{\Delta u_B^{\max}}$;

dla $\alpha_k < 0$:

- jeśli $\alpha_k \cdot \Delta u_B^{\max} < \Delta u_{\min}$, to $\alpha_k = \frac{\Delta u_{\min}}{\Delta u_B^{\max}}$,
- jeśli $\alpha_k \cdot \Delta u_B^{\min} > \Delta u_{\max}$, to $\alpha_k = \frac{\Delta u_{\max}}{\Delta u_B^{\min}}$;

Zauważmy, że przyszłe wartości sterowania będą opisane następującym wzorem:

$$u_{k+j-1|k} = u_{k-1} + \alpha_k \cdot \sum_{i=1}^j \Delta u_B(i), j = 1, \dots, s. \quad (29)$$

Tym razem wprowadźmy oznaczenia:

$$s_B^{\max} = \max\left\{\Delta u_B(1), \sum_{i=1}^2 \Delta u_B(i), \dots, \sum_{i=1}^s \Delta u_B(i)\right\} \quad (30)$$

$$s_B^{\min} = \min \left\{ \Delta u_B(1), \sum_{i=1}^2 \Delta u_B(i), \dots, \sum_{i=1}^s \Delta u_B(i) \right\} \quad (31)$$

W takim razie, w przypadku ograniczeń nałożonych na wartości sterowania (przy założeniu, że s_B^{\max} i s_B^{\min} są nieujemne), należy zastosować następujące reguły przycinania:

dla $\alpha_k > 0$:

– jeśli $u_{k-1} + \alpha_k \cdot s_B^{\min} < u_{\min}$, to $\alpha_k = \frac{(u_{\min} - u_{k-1})}{s_B^{\min}}$,

– jeśli $u_{k-1} + \alpha_k \cdot s_B^{\max} > u_{\max}$, to $\alpha_k = \frac{(u_{\max} - u_{k-1})}{s_B^{\max}}$;

dla $\alpha_k < 0$:

– jeśli $u_{k-1} + \alpha_k \cdot s_B^{\max} < u_{\min}$, to $\alpha_k = \frac{(u_{\min} - u_{k-1})}{s_B^{\max}}$,

– jeśli $u_{k-1} + \alpha_k \cdot s_B^{\min} > u_{\max}$, to $\alpha_k = \frac{(u_{\max} - u_{k-1})}{s_B^{\min}}$;

W przypadku wyboru pewnych funkcji bazowych, powyższe reguły ulegną uproszczeniu.

Przypadek 1. Załóżmy, że trajektoria przyszłych przyrostów sterowania jest funkcją stałą, tzn.

$$\Delta u_B(j) = 1, j = 1, \dots, s. \quad (32)$$

Wtedy $\Delta u_B^{\max} = \Delta u_B^{\min} = 1$, a reguły służące do uwzględniania ograniczeń nałożonych na przyrosty sterowania będą następujące:

– jeśli $\alpha_k < \Delta u_{\min}$, to $\alpha_k = \Delta u_{\min}$,

– jeśli $\alpha_k > \Delta u_{\max}$, to $\alpha_k = \Delta u_{\max}$.

Przyszłe wartości sterowania będą, w tym przypadku, opisane wzorem:

$$u_{k+j-1|k} = u_{k-1} + \alpha_k \cdot j, j = 1, \dots, s, \quad (33)$$

a w takim razie, dla $\alpha_k > 0$, $s_B^{\max} = s$, $s_B^{\min} = 1$ i otrzymamy następujące reguły:

dla $\alpha_k > 0$:

– jeśli $u_{k-1} + \alpha_k < u_{\min}$, to $\alpha_k = u_{\min} - u_{k-1}$,

– jeśli $u_{k-1} + \alpha_k \cdot s > u_{\max}$, to $\alpha_k = \frac{(u_{\max} - u_{k-1})}{s}$;

dla $\alpha_k < 0$:

– jeśli $u_{k-1} + \alpha_k \cdot s < u_{\min}$, to $\alpha_k = \frac{(u_{\min} - u_{k-1})}{s}$,

– jeśli $u_{k-1} + \alpha_k > u_{\max}$, to $\alpha_k = u_{\max} - u_{k-1}$.

Przypadek 2. Jeśli trajektoria przyszłych przyrostów sterowania jest opisana funkcją monotoniczną, wówczas, dla funkcji rosnącej otrzymamy:

$$\Delta u_B^{\min} = \Delta u_B(1), \Delta u_B^{\max} = \Delta u_B(s), \quad (34)$$

a dla funkcji malejącej:

$$\Delta u_B^{\min} = \Delta u_B(s), \Delta u_B^{\max} = \Delta u_B(1). \quad (35)$$

Przypadek 3. Załóżmy, tym razem, że trajektoria przyszłych przyrostów sterowania jest opisana funkcją, dla której jest spełniony warunek:

$$\Delta u_B(j) > 0, j = 1, \dots, s, \quad (36)$$

wówczas

$$s_B^{\min} = \Delta u_B(1), s_B^{\max} = \sum_{i=1}^s \Delta u_B(i). \quad (37)$$

5. EKSPERYMENTY SYMULACYJNE

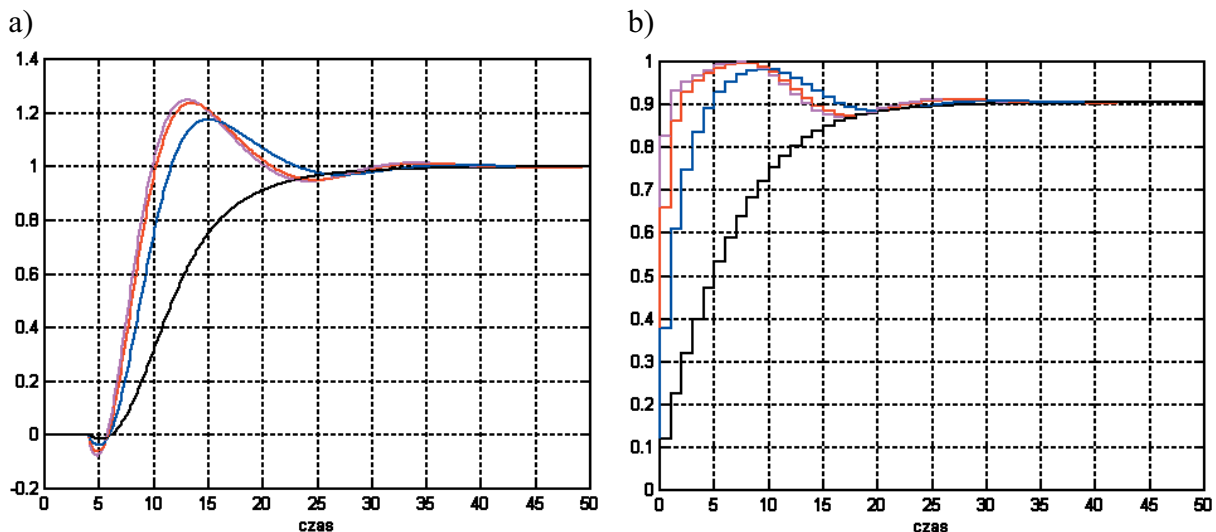
Rozpatrzmy obiekt opisany następującą transmitancją:

$$G(s) = \frac{-s+1}{4s^2+2s+1} \cdot e^{-4s}. \quad (38)$$

Obiekt jest oscylacyjny, ma opóźnienie i odpowiedź odwrotną. Dla potrzeb regulatora predykcyjnego, na podstawie transmitancji (38), otrzymano następujący model w postaci równania różnicowego (założono okres próbkowania $T_p=1$ oraz, że na skutek niedokładności modelowania, wzmacnienie modelu jest o 10% mniejsze niż wzmacnienie obiektu):

$$y_k = 1,414 \cdot y_{k-1} - 0,6065 \cdot y_{k-2} - 0,07584 \cdot u_{k-5} + 0,2493 \cdot u_{k-6}. \quad (39)$$

Do obiektu dobrano regulatory predykcyjne w wersji analitycznej (założono wartości parametrów: $p=20$, $s=10$, $\lambda=0$), sprawdzono wpływ różnych postaci trajektorii przyszłych przyrostów sterowania. Zauważmy, że wybór tej trajektorii ma duży wpływ na charakter otrzymanych odpowiedzi (rys. 1). Przebieg bez przeregulowania został otrzymany dla trajektorii opisanej funkcją $\Delta u_B(j)=1$. Dla funkcji rosnących $\Delta u_B(j)=j$ i $\Delta u_B(j)=j^2$, otrzymano bardzo wolne przebiegi, więc nie zostały one umieszczone na rysunku. Z kolei, gdy zastosowano funkcje malejące: $\Delta u_B(j)=1/j$, $\Delta u_B(j)=1/j^2$, $\Delta u_B(j)=1/j^3$, uzyskano przebiegi z przeregulowaniem. W przypadku dwóch ostatnich funkcji, przebiegi sygnału wyjściowego są praktycznie bardzo podobne, różnicę widać w przebiegu sterowania.



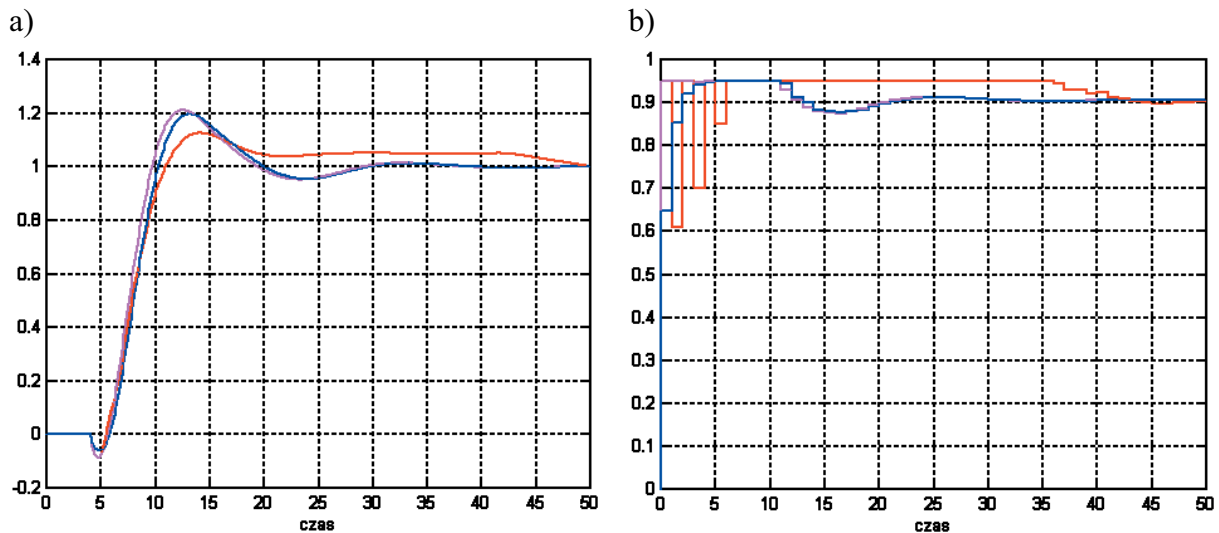
Rys. 1. Odpowiedzi układów regulacji na skok wartości zadanej do $\bar{y} = 1$; regulator z trajektorią przyszłych przyrostów sterowania, opisaną funkcją: $\Delta u_B(j)=1$, $\Delta u_B(j)=1/j$, $\Delta u_B(j)=1/j^2$, $\Delta u_B(j)=1/j^3$;

a) wyjście, b) sterowanie

W kolejnym eksperymencie, sprawdzono działanie mechanizmu uwzględniania ograniczeń. Przyjęto następujące ograniczenia nałożone na wartości sygnału sterującego:

$$-1,05 \leq u_{k+i|k} \leq 0,95. \quad (40)$$

Testy przeprowadzono w układzie regulacji z regulatorem z trajektorią przyszłych przyrostów sterowania postaci: $\Delta u_B(j)=1/j^2$ oraz z następującymi wartościami parametrów regulatora predykcyjnego: $p=9$, $s=5$, $\lambda=0,01$. Otrzymane odpowiedzi przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Odpowiedzi układu regulacji na skok wartości zadanej do $\bar{y} = 1$; regulator z trajektorią przyszłych przyrostów sterowania, opisaną funkcją $\Delta u_B(j)=1/j^2$; ograniczenia: nie są uwzględniane w regulatorze, są uwzględniane w sposób standardowy, są uwzględniane na całym horyzoncie sterowania; a) wyjście, b) sterowanie

W przypadku, gdy ograniczenia nie są uwzględniane w algorytmie, sygnał sterujący przez długi czas pozostaje w nasyceniu, co skutkuje wydłużonym czasem regulacji (przebiegi oznaczone linią czerwoną na rys. 2). Uwzględnienie ograniczeń w sposób standardowy dla algorytmów predykcyjnych w wersji analitycznej, przyniosło znaczne skrócenie czasu regulacji (przebiegi oznaczone linią różową na rys. 2). Podobny rezultat otrzymano, gdy użyto mechanizmów zaproponowanych w niniejszym artykule, umożliwiających uwzględnianie ograniczeń na całym horyzoncie sterowania (przebiegi oznaczone linią niebieską na rys. 2). Warto jednak zauważyć, że w ostatnim z wymienionych przypadków, sygnał sterujący najkrócej pozostaje w nasyceniu i zmienia się najłagodniej. Ponadto, minimalna wartość wyjścia, na początku eksperymentu, jest większa niż w przypadku użycia standardowego mechanizmu przycinania sterowania.

6. PODSUMOWANIE

W referacie zaproponowano algorytmy predykcyjne z założoną postacią trajektorii przyszłych przyrostów sterowania. Dzięki temu, otrzymano algorytmy, które, szczególnie w wersji analitycznej, wymagają niewielkich nakładów obliczeniowych. Pomimo tego, zapewniają dobrą jakość regulacji, także w przypadku zastosowania do obiektów trudnych do sterowania (z opóźnieniami, odpowiedzią odwrotną), co zostało zademonstrowane w rozdz. 5. Co więcej, poprzez zmianę trajektorii przyszłych przyrostów sterowania można wpływać na właściwości zaproponowanych algorytmów. Zyskano więc większą swobodę w doborze regulatora.

Dotychczas, w przypadku standardowych algorytmów predykcyjnych w wersji analitycznej, mechanizmy uwzględniania ograniczeń sygnału sterującego pozwalały wpływać jedynie na pierwsze z ciągu przyszłych sterowań. Dla zaproponowanych w niniejszej pracy algorytmów w wersji analitycznej, opracowano efektywne mechanizmy uwzględniania ograniczeń sygnału sterującego na całym horyzoncie sterowania.

W referacie rozpatruje się przypadek obiektu o jednym wejściu i jednym wyjściu, jednak zaprezentowane tutaj podejście można w łatwy sposób zaadaptować do układów regulacji obiektów o wielu wejściach i wielu wyjściach. Ponadto, pomimo przyjętego w artykule założenia, że model obiektu wykorzystywany przez algorytm predykcyjny ma postać równania różnicowego, w podobny, do zaprezentowanego sposób, można zastosować opisane podejście w przypadku algorytmów bazujących na modelach innego typu.

7. LITERATURA

- [1] E.F. Camacho, C. Bordons: *Model Predictive Control in the process industry*; Springer, 1995.
- [2] E. F. Camacho, C. Bordons, *Model predictive control*; Springer, 1999.
- [3] J.M. Maciejowski: *Predictive Control with constraints*; Prentice Hall 2002.
- [4] P. Marusak: *Regulacja predykcyjna obiektów nieliniowych z zastosowaniem techniki DMC i modelowania rozmytego*; Rozprawa doktorska, Wyd. Elektroniki i Technik Informatycznych Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2002.
- [5] P. Marusak, J. Pułaczewski: *Szczególne zalety algorytmu regulacji Dynamic Matrix Control (DMC)*; Pomiary Automatyka Kontrola nr 12'99, s. 39–43.
- [6] J. Pułaczewski: *Wielowymiarowy algorytm DMC*; Raport IAiS PW nr 98–11, Warszawa, 1998.
- [7] J. A. Rossiter, *Model-based predictive control: a practical approach*; CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [8] J.A. Rossiter, J. Richalet: *Handling constraints with Predictive Functional Control of unstable processes*; American Control Conference 2002, Anchorage, AK, USA, s. 4746–4751.
- [9] P. Tatjewski: *Advanced control of industrial processes: structures and algorithms*; Springer, Londyn, 2007.